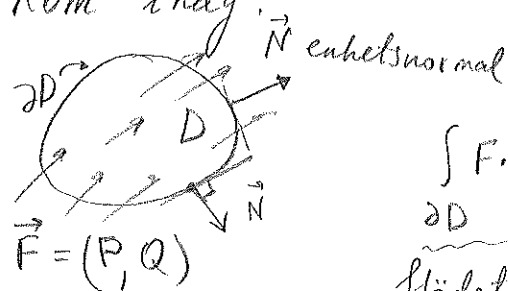


Kap 10.2. Gauss sats.

Gauss: 1777 - 1855

född: Braunschweig
stud: Göttingen

Kom ihåg:



$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{N} ds = \int_{\partial D} -Q dx + P dy$$

flödet ut ur D

Greens

"divergens."

$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy$$

produktion av materia inom D.

Sats (Gauss' sats / divergenssatsen)

Låt $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ vara ett C^1 vektor fält i en öppen mängd $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Om $K \subset \Omega$ är kompakt och ∂K består av en eller flera C^1 -ytor orienterade med utåtriktad normal, så gäller

$$\iint_{\partial K} \vec{u} \cdot \vec{N} d\vec{S} = \iiint_K \operatorname{div} \vec{u} \underbrace{dx_1 dx_2 dx_3}_{dV \text{ (notation)}}$$

$d\vec{S}$ (notation)

$$\text{där } \operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}.$$

Bevis i fallet $K = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ är en box.

$$\text{Vi har } \iint_{\partial K} \vec{u} \cdot d\vec{S} = \iint_{\partial K} (u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3) d\vec{S} =$$

$$= \iint_{\partial K} u_1 \vec{e}_1 d\vec{S} + \iint_{\partial K} u_2 \vec{e}_2 d\vec{S} + \iint_{\partial K} u_3 \vec{e}_3 d\vec{S},$$

$$\iiint_K \operatorname{div} \vec{u} dV = \iiint_K \operatorname{div}(u_1 \vec{e}_1) dV + \iiint_K \operatorname{div}(u_2 \vec{e}_2) dV +$$

$$+ \iiint_K \operatorname{div}(u_3 \vec{e}_3) dV.$$

Det räcker därför att visa

$$\iint_{\partial K} u_j \vec{e}_j \cdot d\vec{s} = \iiint_K \operatorname{div} (u_j \vec{e}_j) dV, \quad j=1, 2, 3.$$

Tag $j=1$ (sätt $u = u_1 \vec{e}_1$). Då

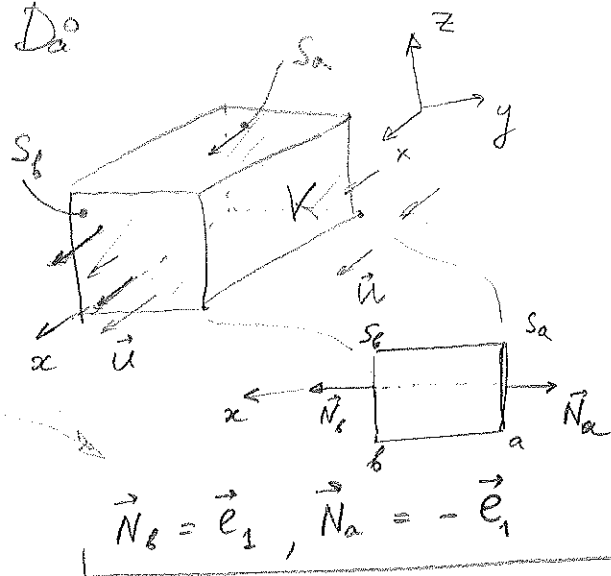
$$\iint_{\partial K} \vec{u} \cdot d\vec{s} = \iint_{S_b} \vec{u} \cdot \vec{N}_b dS + \iint_{S_a} \vec{u} \cdot \vec{N}_a dS$$

$$= \int_c^f \int_c^d u_1(b, y, z) \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 dy dz$$

$$+ \int_c^f \int_c^d u_1(a, y, z) \vec{e}_1 \cdot (-\vec{e}_1) dy dz =$$

$$= \int_c^f \int_c^d (u_1(b, y, z) - u_1(a, y, z)) dy dz =$$

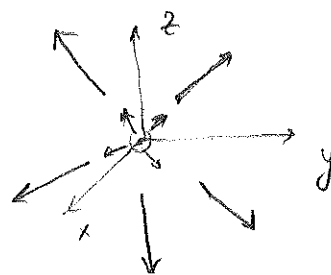
$$= \int_c^f \int_c^d \int_a^b \underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x, y, z)}_{= \operatorname{div} u} dx dy dz = \iiint_K \operatorname{div} u dV \quad \square.$$



Ex 1 $\vec{u} = (x, y, z)$

$$K = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\vec{x}| \leq R \}$$

- boll med radie R centrerad i origo



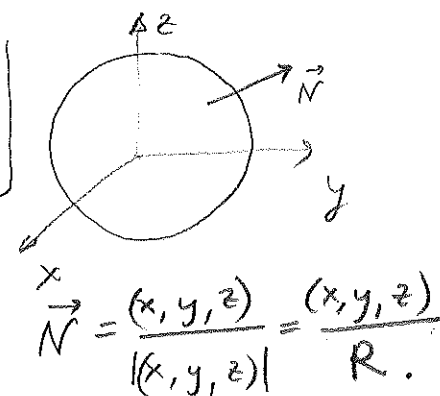
$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3,$$

$$\iiint_K \operatorname{div} u dV = 3 \cdot \operatorname{Volym}(K) = 3 \cdot \frac{4\pi R^3}{3} = 4\pi R^3.$$

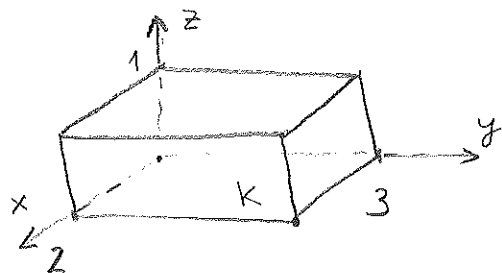
$$\iint_{\partial K} \vec{u} \cdot d\vec{s} = \iint_{\partial K} R \underbrace{\vec{N} \cdot \vec{N}}_{=1} dS = R \iint_{\partial K} dS =$$

$$= R \cdot \operatorname{area}(\partial K) = R \cdot 4\pi R^2 = 4\pi R^3.$$

Stämmer



Ex 2 Beräkna $\iint_{\partial K} (x^2, z^4, e^z) \cdot d\vec{S}$ där K är boxen



Lös.

$$\iint_{\partial K} (x^2, z^4, e^z) \cdot d\vec{S} \stackrel{\text{Gauss}}{=} \iiint_K \operatorname{div} (x^2, z^4, e^z) dV =$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^3 \left(\int_0^1 (2x + 0 + e^z) dz \right) dy \right) dx = \int_0^2 \int_0^3 \underbrace{\left(\int_0^1 2x dx \right)}_4 dy dz$$

$$+ \int_0^2 \int_0^3 \underbrace{\left(\int_0^1 e^z dz \right)}_{e-1} dy dx = 12 + 6(e-1) = 6(e+1).$$

Kommentar: Låt $B_\varepsilon(\vec{y})$ vara boll med radie ε centrerad i $\vec{y}$.

$$\frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\varepsilon(\vec{y}))} \iiint_{B_\varepsilon(\vec{y})} \operatorname{div} \vec{u}(\vec{x}) d\vec{x} \rightarrow \operatorname{div} \vec{u}(\vec{y}) \text{ då } \varepsilon \rightarrow 0$$

pga kontinuitet av $(\operatorname{div} \vec{u})$.

$$= \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\varepsilon(\vec{y}))} \iint_{\partial B_\varepsilon(\vec{y})} \vec{u} \cdot \vec{n} dS \rightarrow \operatorname{div} \vec{u}(\vec{y}) \text{ då } \varepsilon \rightarrow 0$$

"flödet ut - flödet in" "produktion av flödet inom $B_\varepsilon(\vec{y})$ ".

Alltså, kan divergensen tolkas som "Källtäthet",
dvs mått på lokal produktion av flödet.

Var försiktig med att använda satsen! Se till att $\underline{u \in C^1(K)}$

Ex * (Sats) $\iint_{\partial K} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} 4\pi & \text{om } \vec{0} \in K \\ 0 & \text{om } \vec{0} \notin K \end{cases}$

OBS: om $\vec{0} \notin K$, så $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \in C^1(K)$, och

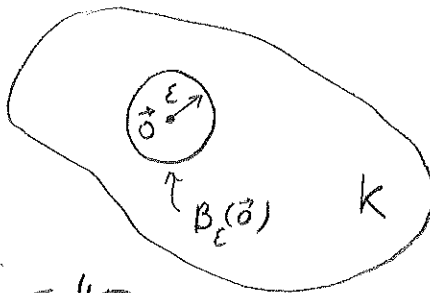
Gauss sats kan tillämpas. Den ger:

$$\begin{aligned} \iint_{\partial K} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} d\vec{S} &= \iiint_K \operatorname{div} \left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) dV = \iiint_K \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_i}{|\vec{r}|^3} \right) dV = \\ &= \iiint_K \sum_{i=1}^3 \frac{|\vec{r}|^3 - x_i \cdot 3|\vec{r}|^2 \cdot \left(\frac{\partial |\vec{r}|}{\partial x_i} \right)}{|\vec{r}|^6} dV = \end{aligned}$$

$$\iiint_K \sum_{i=1}^3 \frac{|\vec{r}|^3 - 3x_i^2 \cdot |\vec{r}|}{|\vec{r}|^6} dV = \iiint_K \frac{1}{|\vec{r}|^6} (3|\vec{r}|^3 - 3|\vec{r}|^3) dV = 0.$$

(för att $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = |\vec{r}|^2$.)

Men om $\vec{0} \in K$ (dvs $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ har en singularitet i $\vec{0}$) kan inte Gauss sats tillämpas i hela K . Betrakta

$$\begin{aligned} \iint_{|\vec{r}|=\varepsilon} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \cdot d\vec{S} &= \iint_{|\vec{r}|=\varepsilon} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \right) dS = \\ &\leftarrow \text{sfer med radie } \varepsilon, \text{ centrum i } \vec{0} \quad \uparrow \vec{N} \end{aligned}$$


$$= \iint_{|\vec{r}|=\varepsilon} \frac{|\vec{r}|^2}{|\vec{r}|^4} dS = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{|\vec{r}|=\varepsilon} dS = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot 4\pi\varepsilon^2 = 4\pi.$$

Men $\underbrace{K \setminus B_\varepsilon(\vec{0})}_{\tilde{K}}$ är en kompakt som inte innehåller $\vec{0}$, alltså, enligt ovan, $\iint_{\partial \tilde{K}} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \cdot d\vec{S} = 0$. Vi har då

$$\iint_{\partial K} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \cdot d\vec{S} = 4\pi. \quad \text{Se ex 8,9 sid 339-340.}$$

Ex Den elektriska fältet $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$

↑ laddning
↑ konst.



uppfyller $\iint_{\partial K} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} \frac{q}{\varepsilon_0} & \text{om } q \in K \\ 0 & \text{om } q \notin K. \end{cases}$

Gauss lag: om $\vec{E}$ är den elektriska fältet genererad av N punktladdningar q_i , så gäller:

$$\iint_{\partial K} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\text{Total laddning inuti } K}{\varepsilon_0}$$