

Kap. 10.1 Vektoranalys i rummet.

Kurv- och ytintegraller.

Ex 1 Beräkna det arbete kraftfältet

$$\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, z^2)$$

utför längs kurvan γ given av

$$\vec{r}(t) = (t, t^2, \sin t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

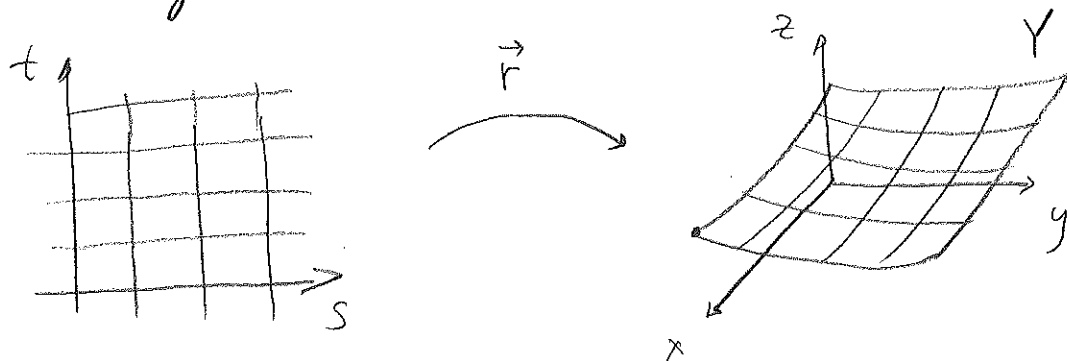
Lösning Arbete = $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt =$

$$= \int_0^{2\pi} (-t^2, t, \sin^2 t) \cdot (1, 2t, \cos t) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-t^2 + 2t^2 + \sin^2 t \cos t) dt = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{\sin^3 t}{3} \right]_0^{2\pi} =$$

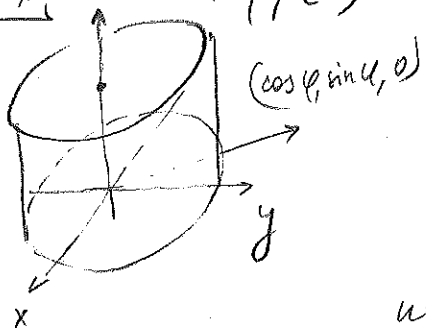
$$= \frac{(2\pi)^3}{3}.$$

Låt ytan $Y \subset \mathbb{R}^3$ vara given av $\vec{r} = \vec{r}(s, t), (s, t) \in D$.



Def Den sida av Y åt vilken normalvektorn $\vec{r}_s' \times \vec{r}_t'$ pekar kallas för positiva sidan.

Ex $\vec{r}(\varphi, z) = (\cos \varphi, \sin \varphi, z) \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 1$



Eftersom $\vec{r}_\varphi' \times \vec{r}_z' = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$

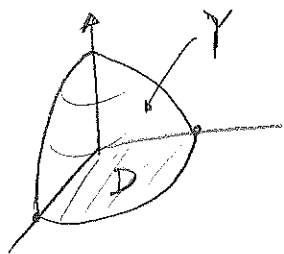
$= (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$, så är cylinderns utsida som är den positiva sidan.

Def $\vec{N} = \frac{\vec{r}'_s \times \vec{r}'_t}{|\vec{r}'_s \times \vec{r}'_t|}$ är ytans enhetsnormal.

Def $dS = \vec{N} dS = (\vec{r}'_s \times \vec{r}'_t) ds dt$ kallas för det vektoriella areaelementet

Def $\Phi = \iint_Y \vec{F} \cdot dS$ är flödet av vektorfältet $\vec{F}$ genom ytan Y .

Ex Beräkna flödet av $\vec{F} = (y, -x, 4)$ uppåt genom Y där Y ges av $z = 1 - x^2 - y^2$, $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.



Lös. Projektionen av Y på (x,y) -planet är $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Ytan kan parametriseras av

$$\vec{r}(x,y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2), \quad (x,y) \in D$$

$$\text{Mär } \begin{matrix} r'_x = i, 0, -2x \\ r'_y = 0, i, -2y \end{matrix}$$

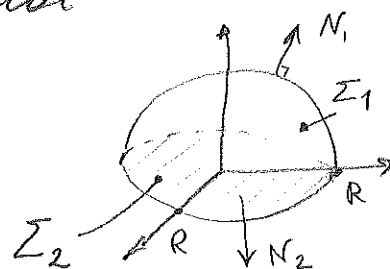
$$r'_x \times r'_y = (2x, 2y, 1) \quad (\text{uppåt})$$

$$\iint_Y \vec{F} \cdot dS = \iint_D \vec{F} \cdot (r'_x \times r'_y) dx dy = \iint_D (2xy - 2xy + 4) dx dy$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r dr d\phi = 4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \pi.$$

Ex Beräkna flödet av fältet $F = (x+y, z, -y)$ ut genom randen av en halvklot
 $H = x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0$

Lös. Randen består av 2 bitar:



Σ_1 och Σ_2 .

OBS: projektionen av Σ_1 på (x,y) -planet är Σ_2

Den yttre ^{enhets}normalen i punkt $\vec{r} = (x, y, z)$ på Z_1 är

$$N_1 = \frac{(x, y, z)}{|(x, y, z)|} = \frac{\vec{r}}{R}.$$

Flödet uppåt genom Z_1 är

$$\Phi_1 = \iint_{Z_1} F \cdot N_1 dS = \iint_{Z_1} (x+y, z, -y) \cdot \frac{(x, y, z)}{R} dS =$$

$$= \iint_{Z_1} x^2 + \cancel{xy} + y^2 + \cancel{yz} - yz dS = \iint_{Z_1} x^2 dS \quad (\equiv)$$

0 pga symmetri

OBS: Om S_R är en sfär med centrum i 0, så $\iint_{S_R} x^2 dS = \iint_{S_R} y^2 dS = \iint_{S_R} z^2 dS$

$$\Rightarrow \iint_{S_R} x^2 dS = \frac{1}{3} \iint_{S_R} (x^2 + y^2 + z^2) dS = \frac{1}{3} \iint_{S_R} R^2 dS =$$

$$\frac{1}{3} R \cdot \text{area}(S_R) = \frac{1}{3} R \cdot 4\pi R^2 = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \iint_{S_R} x^2 dS = \frac{2}{3} \pi R^3.$$

Den yttre normalen till Z_2 är $N_2 = (0, 0, -1)$.
Flödet nedåt genom Z_2 är

$$\Phi_2 = \iint_{Z_2} F \cdot N_2 dS = \iint_{Z_2} (x+y, z, -y) \cdot (0, 0, -1) dS =$$

$$\iint_{Z_2} y dS = 0 \quad (\text{pga symmetri}).$$

