

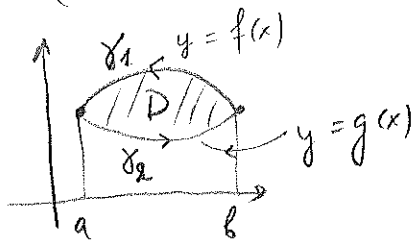
Kap. 9.3 Tillämpningar av Greens formel

Greens formel $\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$.

Ex. a) $P=0, Q=x$ ger $\text{Area}(D) \stackrel{\text{def.}}{=} \iint_D dx dy \stackrel{\text{sats}}{=} \int_{\partial D} x dy$

b) $P=-y, Q=0$ ger $\text{Area}(D) = \iint_D dx dy = \int_{\partial D} -y dx$

Ex (Illustrerar b) : Låt $F = (P, Q) = (-y, 0)$ vara vektorfält,



$$\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2,$$

$$\gamma_1: \vec{r}_1 = (x, f(x)), \quad x \in [a, b] \quad (\text{neg. orient})$$

Här $F = (-f(x), 0)$

$$\gamma_2: \vec{r}_2 = (x, g(x)), \quad x \in [a, b] \quad (\text{pos. orient.})$$

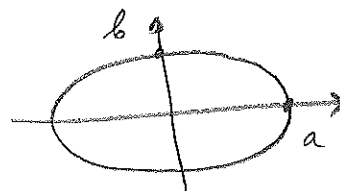
Här $F = (-g(x), 0)$.

Från Envariabeln, $\text{Area}(D) \stackrel{\text{se b)}}{=} \int_{\gamma_1} y dx + \int_{\gamma_2} y dx =$

$$= \int_b^a \underbrace{(-f(x))}_{y \text{ på } \gamma_1} dx + \int_a^b (-g(x)) dx = \underbrace{\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx}_{\text{som i Envariabeln.}}$$

Ex (Area av ellips)

$$E = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$$



$$\partial E: \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

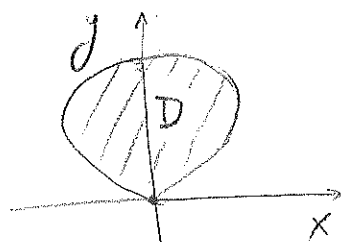
$$\begin{aligned} \text{Area}(E) &= \frac{1}{2} \int_{\partial D} -y dx + x dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \underbrace{-b \sin t \cdot (-a \sin t)}_{dx} dt + a \cos t \underbrace{(b \cos t)}_{dy} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt = \underline{\pi ab} \end{aligned}$$

Ex. Beräkna $\text{area}(D)$ där D är området inuti kurvan $\partial D: (\sin 2t, \sin t)$, $t \in [0, \pi]$.

$$\text{Area}(D) = \frac{1}{2} \int_{\partial D} (-y dx + x dy) = \frac{1}{2} \int_0^\pi -\sin t \cdot \underbrace{(2 \cos t dt)}_{dx} + \sin 2t \cdot \underbrace{\cos t dt}_{dy} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\pi (-\sin t \cdot 2(\cos^2 t - \sin^2 t) + 2 \sin t \cos t \cdot \cos t) dt =$$

$$= \int_0^\pi \sin^3 t dt = \int_0^\pi (1 - \cos^2 t) \sin t dt = \left[\begin{array}{l} \cos t = s \\ -\sin t dt = ds \\ t=0 \rightarrow s=1 \\ t=\pi \rightarrow s=-1 \end{array} \right] =$$



$$= \int_{-1}^1 (1 - s^2) ds = \left[s - \frac{s^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}.$$

Flöde (se även sid. 334)

Låt γ vara en C^1 -kurva i $\mathbb{R}^2$ med param.

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)).$$

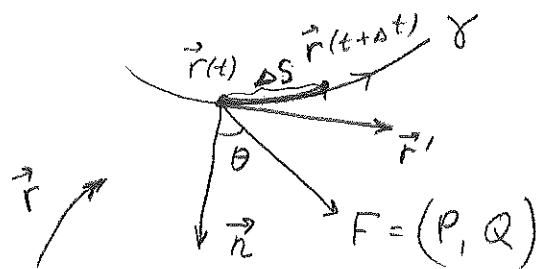
Da $\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$ är tangent

$\vec{n} = (y'(t), -x'(t))$ är normal

$$|\vec{n}| = |\vec{r}'|$$

$$\vec{N} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(y'(t), -x'(t))}{|\vec{r}'|} =$$

enhetsnormal



Flödet av $\vec{F}$ genom biten Δs av kurvan är

$$\underbrace{|\vec{F}| \cdot \cos \theta}_{\text{projektion av } \vec{F} \text{ på } \vec{n}} \cdot \underbrace{\Delta s}_{\text{längd}} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \cdot \Delta s = (\vec{F} \cdot \vec{N}) \Delta s \quad (*)$$

$$= \frac{(P, Q) \cdot (y', -x')}{|\vec{r}'|} \cdot |\vec{r}'| \Delta t = (P y' - Q x') \Delta t =$$

$$= -Q \Delta x + P \Delta y \quad (**)$$

Genom att summera uttrycken $(*)$ (alt, $(**)$)
 över alla små bitar av γ och låta indelningen
 bli finare och finare, får vi:

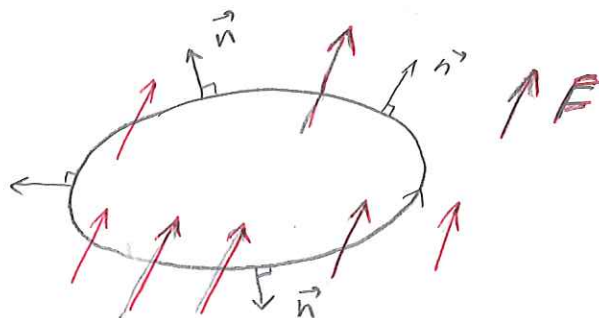
Flödet av $F = (P, Q)$ genom γ är

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{N} ds = \int_{\gamma} -Q dx + P dy.$$

↑
enhetsnormal

Låt $\gamma = \partial D$.

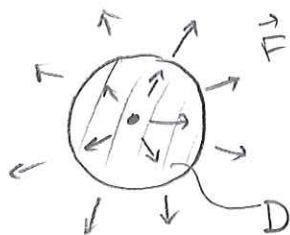
Greens formel ger:



$$\int_{\partial D} -Q dx + P dy = \iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right)}_{\text{div } \vec{F}} dx dy \quad (\text{divergens av } \vec{F})$$

"lokala produktionen av
 den strömmande substansen".

ϵ_x



$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{N} ds \text{ stor.}$$

