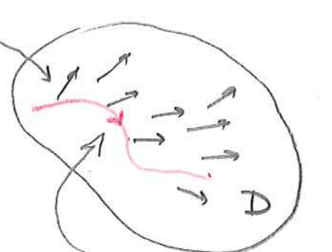
Kap 9 Vektoranalys i planet

Kap 9.1 Kurvintegraler.



Låt $\begin{cases} F: D \to \mathbb{R}^2 \\ F(\vec{r}) = (P(\vec{r}), Q(\vec{r})) = (P(x,y), Q(x,y)) \end{cases}$ $\quad \alpha \quad \beta$

vara en kontin. vektorfält på en öppen mängd $D \subset \mathbb{R}^2$.

Låt γ vara en C^1-kurva i D med parametrisering

$\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, $\quad \alpha \le t \le \beta$ (OBS: γ är orienterad!)

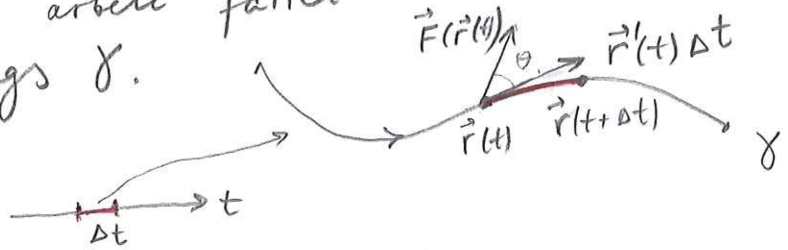
Kurvintegralen av $\vec{F}$ längs γ ges av

$$\int_\alpha^\beta F(r(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \left(P(x,y)\cdot x'(t) + Q(x,y)\cdot y'(t)\right) dt$$

och betecknas

$$\int_\gamma F \cdot dr \quad \text{eller} \quad \int_\gamma P\,dx + Q\,dy$$

Ex 1 Om $\vec{F}$ är ett kraftfält, så är $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ det arbete fältet uträttar när en partikel förflyttas längs γ.



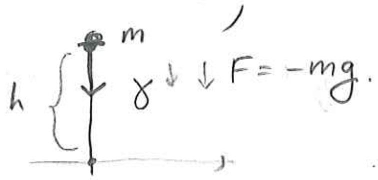
(dvs den energi som fältet tillför partikeln)

$|r_t'|\Delta t$. $\quad |F|\cdot\cos\theta = |r_t'|\cdot\Delta t \cdot \frac{(\vec{r}_t\,' \cdot F)}{|r_t'|} = (\vec{r}\,'\cdot F)\Delta t$.

strecka $\quad$ projektion av F på tang.

T.ex., om $F = (0, -mg)$, och $\vec{r}(t) = (0, h-t)$, $\quad 0 \le t \le h$,

får vi $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^h (0, -mg)\cdot(0, -1)\,dt =$

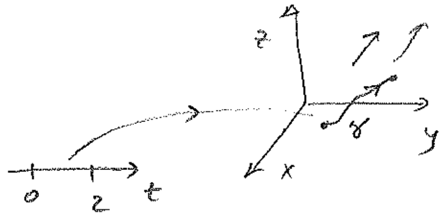


$= m \cdot g \cdot h$ = energin.

Ex Låt $\vec{F}(x,y,z) = (z, y^2, x)$

$\gamma: \vec{r}(t) = (t+1, e^t, t^2)$

$0 \le t \le 2$



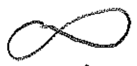
$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^2 \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot \vec{r}'\,dt =$$

$$\int_0^2 (t^2, e^{2t}, t+1)\cdot(1, e^t, 2t)\,dt = \int_0^2 \left(t^2 + e^{3t} + 2t(t+1)\right)dt$$

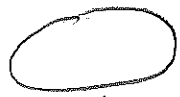
$$= \left[\frac{\cancel{3}t^3}{\cancel{3}} + \frac{1}{3}e^{3t} + t^2\right]_0^2 = \frac{1}{3}e^6 + 12 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(e^6 - 35).$$

Def En kurva γ är __sluten__ om dess start- och slutpunkt sammanfaller; γ är __enkel__ om den är sluten samt inte skär sig själv.

ej sluten (ej enkel)

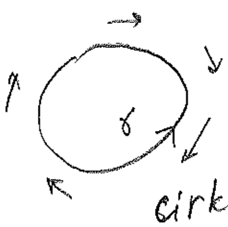


sluten
ej enkel

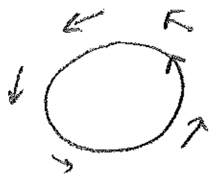


sluten, enkel.

Def Om γ är enkel och sluten, så kallas $\int_\gamma F\cdot dr$ för __cirkulationen av vektorfältet F längs γ.__

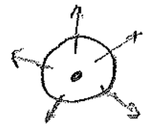


cirkulationen < 0



cirkulationen > 0

Ex (se Ex 4 sid 332) Låt $E(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$, $x, y \neq 0$



γ = positivt orienterad cirkel σ_R med radie $R > 0$ och centrum i origo.

γ parametriseras som $\vec{r}(t) = (R\cos t, R\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

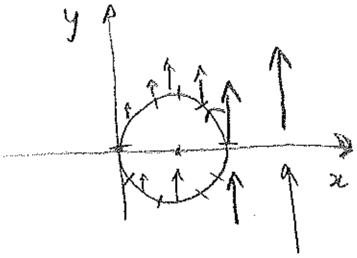
$$\int_\gamma \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{R\cos t}{R^2(\cos^2 t + \sin^2 t)}, \frac{R\sin t}{R^2(\cos^2 t + \sin^2 t)}\right)\cdot(-R\sin t, R\cos t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(-\frac{R^2\sin t\cos t}{R^2} + \frac{R^2\sin t\cos t}{R^2}\right)dt = 0.$$

Cirkulationen är 0.

Ex Låt $F = (0, x)$ vara ett vektorfält

γ = positivt orienterad cirkel med radie 1 och centrum i $(1,0)$, med positiv orientering



Parametrisera γ: $\begin{cases} x-1 = \cos\varphi \\ y = \sin\varphi \end{cases}$

$\vec{r}(\varphi) = (1+\cos\varphi, \sin\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi]$

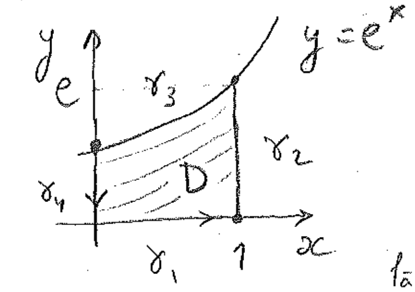
$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (0, 1+\cos\varphi)\cdot(-\sin\varphi, \cos\varphi)\,d\varphi = \int_0^{2\pi} (\underbrace{\cos\varphi}_{\to 0} + \cos^2\varphi)\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\varphi + 1}{2}\,d\varphi = \pi.$$

cirkulation > 0

"Kraftfältet F skulle rotera ringen γ i positiv riktning"!

Ex. Bestäm cirkulationen av $\vec{F} = (e^x y^2, \cos x)$ längs ∂D där



γ_3 parametriseras:
$\vec{r}_3(x) = (x, e^x), \quad 0 \le x \le 1$
Här $F(\vec{r}_3(x)) = (e^x \cdot e^{2x}, \cos x) = (e^{3x}, \cos x)$.

lämplig parameter

Lösning: cirkulation $= \sum_{j=1}^{4} \int_{\gamma_i} \vec{F}\cdot\vec{r}_i{}'(t)\,dt$

$$= \underbrace{\int_0^1 (0, \cos x)\cdot(1,0)\,dx}_{0} + \underbrace{\int_0^e (ey, \cos 1)\cdot(0,1)\,dy}_{} + \underbrace{\int_1^0 (\underbrace{e^{3x}, \cos x}_{F(\vec{r}_3(x))})\cdot(\underbrace{1, e^x}_{\vec{r}_3{}'(x)})\,dx}_{\gamma_3 \text{ – se ovan}} +$$

γ_1: $\vec{r}_1 = (x, 0)$; $x \in [0,1]$. Här $y \equiv 0$.

γ_2: $\vec{r}_2 = (1, y)$, $y \in [0, e]$. Här $x \equiv 1$.

$$+ \underbrace{\int_1^0 (y^2, 1)\cdot(0,1)\,dy}_{} = 0 + e\cdot\cos 1 + \int_1^0 (e^{3x} + e^x\cos x)\,dx - 1 \ =$$

γ_4: $\vec{r}_4 = (0, y)$, $y \in (0,1)$, neg. orient. Här $x \equiv 0$.

$$I = \int \underset{u}{e^x}\cdot\underset{v'}{\cos x}\,dx = \underset{uv}{e^x\sin x} - \int \underset{u}{e^x}\underset{v'}{\sin x} = e^x\sin x - (\underset{uv}{-e^x\cos x} + \int e^x\cos x) =$$

$v = \sin x$ $\qquad$ $v = -\cos x$

$$= e^x(\sin x + \cos x) - I$$

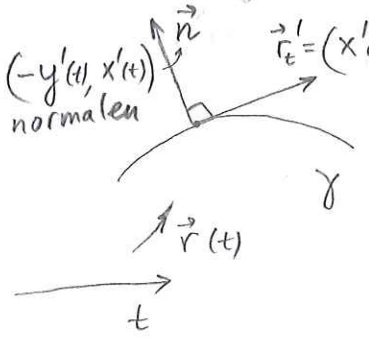
$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x)$$

$$= e\cdot\cos 1 - \left[\frac{e^{3x}}{3} + \frac{1}{2}e^{x}(\sin x+\cos x)\right]_0^1 - 1 =$$

$$= e\cdot\cos 1 - \left[\frac{e^{3}}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}e(\sin 1+\cos 1) - \frac{1}{2}\right] - 1 =$$

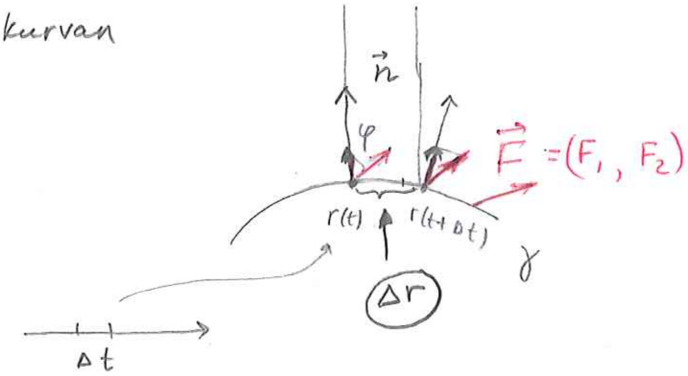
$$= \frac{e}{2}(\cos 1 - \sin 1) - \frac{e^{3}}{3} - \frac{1}{6}.$$

Ex **Flödet genom kurvan** (se sid 334)



$\vec r_t' = (x'(t), y'(t))$ = tangent till kurvan

$\vec r(t) = (x(t), y(t))$



OBS: $|\vec n| = |(-y'(t), x'(t))| = |\vec r_t'|$

flödet genom Δr $\approx \underbrace{|\vec r_t'|\Delta t}_{\text{längd av } \Delta r} \cdot \underbrace{|\vec F|\cos\varphi}_{\text{längd av projektionen av } \vec F \text{ på } \vec n} = \cancel{|\vec r_t'|}\cdot\Delta t\cdot\frac{(\vec F\cdot\vec n)}{\cancel{|\vec n|}} = \vec F\cdot\vec n\cdot\Delta t.$

Flödet genom γ är då

$$\int_\gamma \vec F\cdot\vec n\,dt = \int_\gamma \left(-F_1\, y'(t) + F_2\, x'(t)\right)dt.$$

$\boxed{\text{Se även föreläsning om Kap. 9.2}}$