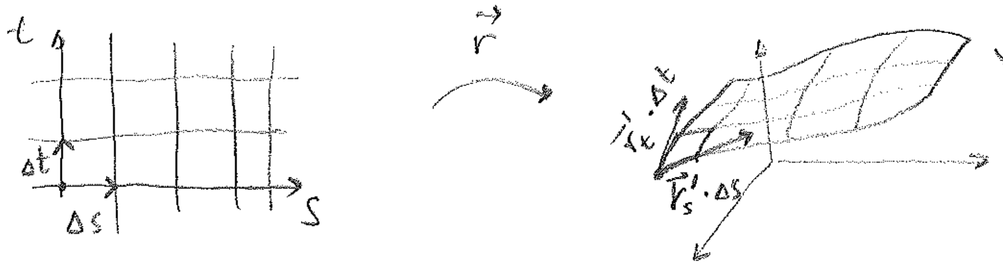
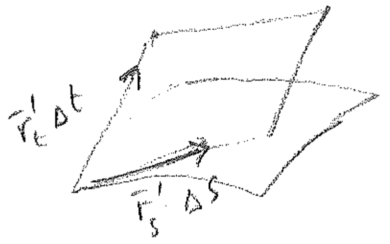
Kap. 8.2 Area av buktig yta.

Låt $\vec{r}: D \to \mathbb{R}^3$ vara en parametrisering av en yta $Y \subset \mathbb{R}^3$





Area av ytbit ≈

Area av parallellogram =

$$= |(\vec{r}_s'\Delta s)\times(\vec{r}_t'\cdot\Delta t)| = |\vec{r}_s' \times \vec{r}_t'|\,\Delta s\,\Delta t$$

Alltså är arean av ytan

$$\text{Area}(Y) = \iint_D |r_s' \times r_t'|\, ds\, dt.$$

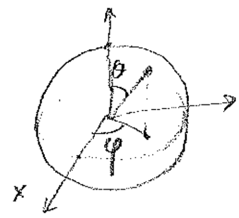
Man skriver

$$\text{Area}(Y) = \iint_D dS \quad \text{där } dS \overset{\text{notation}}{=} |r_s' \times r_t'|\,ds\,dt \text{ är}$$

"area element".

Ex. En sfär S med radie R i $\mathbb{R}^3$ har area $4\pi R^2$.

Bevis Parametrisera S:



$$\vec{r}(\theta,\varphi) = (R\sin\theta\cos\varphi,\ R\sin\theta\sin\varphi,\ R\cos\theta)$$

$$0 \le \theta \le \pi, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Vi har:

$$r_\theta' = R(\cos\theta\cos\varphi,\ \cos\theta\sin\varphi,\ -\sin\theta)$$

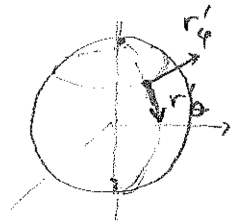
$$r_\varphi' = R(-\sin\theta\sin\varphi,\ \sin\theta\cos\varphi,\ 0)$$

$$|r_\theta' \times r_\varphi'| = R^2|(\sin^2\theta\cos\varphi,\ -\sin^2\theta\sin\varphi,\ \cos\theta\sin\theta)| =$$

$$= R^2\sqrt{\sin^4\theta + \cos^2\theta\sin^2\theta} = R^2\sqrt{\sin^2\theta} = R^2\sin\theta.$$

för $\theta \in (0,\pi)$, $\sin\theta > 0$.

$$\text{Area} = \iint_S dS = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi} R^2 \sin\theta \, d\theta\right) d\varphi =$$



$$2\pi R^2 \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = 4\pi R^2.$$

Ex. Beräkna totala laddningen på en sfär S med radie 5 cm. vars laddningsdensitet i sfäriska koordinater är $\rho(\theta,\varphi) = 0{,}003 \cos^2\theta$ C/cm².

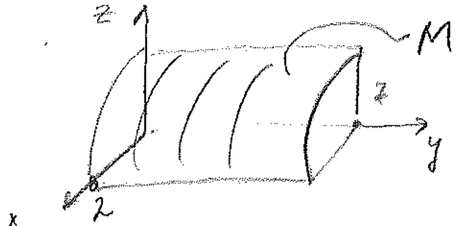
Lösn. $$\text{Totala laddn.} = \iint_S \rho(\theta,\varphi)\, dS =$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi} \underbrace{0{,}003 \cos^2\theta}_{\rho(\theta,\varphi)} \cdot \underbrace{5^2 \sin\theta}_{\text{från Ex ovan}} \, d\theta\right) d\varphi = 0{,}003 \cdot 25 \cdot 2\pi \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta$$

$$= 0.15\pi \cdot \left(-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)_{\theta=0}^{\pi} = 0.1\pi \text{ C}.$$

Uppg. 8.19. Betrakta kvartsstaven

$x^2+z^2 \le 4, \quad 0 \le y \le 7, \quad x \ge 0, \ z \ge 0.$



Temperaturen på mantelytan (dvs ickeplana delen av begränsningsytan är $T(x,y,z) = y^2\sqrt{2-x}$.

Effekten per areaenhet är kT^4 där k = konst. Beräkna den totala effekten M utstrålar, dvs

$$P = \iint_M k\left(T(x,y,z)\right)^4 dS$$

Lösning: $\vec{r}(s,t) = (2\sin s, \ t, \ 2\cos s)$

$0 \le s \le \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \le t \le 7,$ är en parametrisering av M.

$r'_s = (2\cos s, \ 0, \ -2\sin s)$

$r'_t = (0, \ 1, \ 0)$.

$$r'_s \times r'_t = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2\cos s & 0 & -2\sin s \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (2\sin s, \ 0, \ 2\cos s).$$

$$|r_s' \times r_t'| = \sqrt{4\sin^2 s + 4\cos^2 s} = 2.$$

Funktionen T på ytan blir $k \cdot y^2_{(s,t)} \cdot \sqrt{2 - x(s,t)} = k t^2 \sqrt{2 - 2\sin s}$

Alltså, $P = \int_0^7 \int_0^{\frac{\pi}{2}} k\left(t^2\sqrt{2-2\sin s}\right)^4 \cdot 2\, ds\, dt =$

$$= 2k\left(\int_0^7 t^8\, dt\right) \cdot \left(\int_0^{\pi/2} (2-2\sin s)^2 ds\right) = 2k \cdot \left[\frac{t^9}{9}\right]_0^7 \cdot 4 \int_0^{\pi/2} \left(1 - 2\sin s + \sin^2 s\right) ds$$

$$= 8k \cdot \frac{7^9}{9} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2\left[\cos s\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2s}{2}\, ds}_{\frac{\pi}{4}}\right) =$$

$$= 8k \cdot \frac{7^9}{9} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 2 + \frac{\pi}{4}\right) = 2k \cdot \frac{7^9}{9} \cdot (3\pi - 8).$$