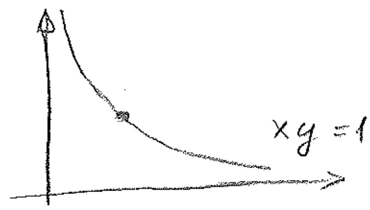
Kap. 4.3 Optimering med bivillkor

Ex. Bestäm det kortaste avståndet från origo till kurvan $xy = 1$ $x>0,\ y>0$

Alltså, minimera
$f(x,y) = x^2+y^2$.



Lösn. På kurvan $y=\frac{1}{x}$.

Vill minimera $f(x,\frac{1}{x}) = x^2+\frac{1}{x^2}$ över $x>0$.

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) = 2x-\frac{2}{x^3} = 2\,\frac{x^4-1}{x^3} = 0 \implies x=1$$

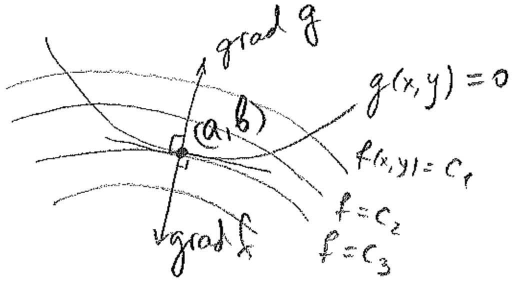
x	0		1	
f'		$-$	0	$+$
f		$\searrow$	min	$\nearrow$

Det minsta avståndet är $\sqrt{f(1,1)} = \sqrt{2}$.

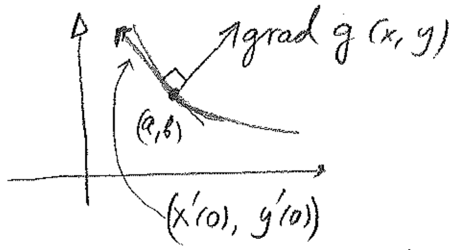
Sats Låt $\begin{cases} f: D_f \to \mathbb{R} \\ g: D_g \to \mathbb{R} \end{cases}$ vara C^1 med $D_f \subset \mathbb{R}^2$, $D_g \subset \mathbb{R}^2$.

Antag att $f(x,y)$ maximeras eller minimeras under bivillkoret $g(x,y)=0$ i en inre punkt $(a,b) \in D_f \cap D_g$. Då är vektorerna $\operatorname{grad} f(a,b)$ och $\operatorname{grad} g(a,b)$ parallella.

Bevis. Antag att $\operatorname{grad} g(a,b) \neq 0$ (annars är satsen uppfylld trivialt).



Eftersom grad $g(a,b) \neq 0$, implicitafunktionssatsen medför att $\exists$ en parametisering



$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\,; \end{cases} \quad \text{låt } (x(0), y(0)) = (a, b).$$

av nivåkurvan $g = 0$ nära (a,b).

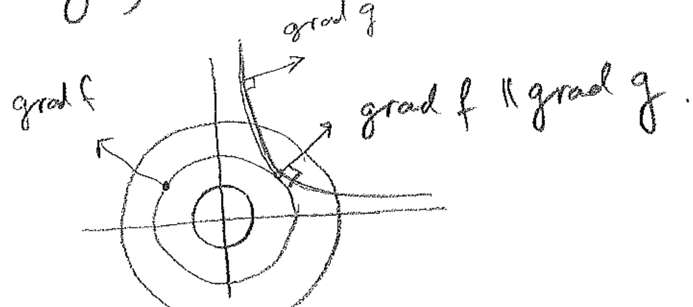
Eftersom $f(x(t), y(t))$ har ett lokalt extremvärde i $t = 0$, så

$$0 = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t))\Big|_{t=0} = \operatorname{grad} f(x(0), y(0)) \cdot (x'(0), y'(0))$$

$$= \operatorname{grad} f(a,b) \cdot (x'(0), y'(0)) = 0 \quad \text{(om grad } f(a,b) \text{ är definierad).}$$

dvs grad $f(a,b) \perp$ nivåkurvan av g.

$\underline{\text{Ex}}$ (alternativ lösning)



$f(x,y) = x^2 + y^2$

$g(x,y) = xy - 1$

$$\begin{cases} \operatorname{grad} f = (2x, 2y) \\ \operatorname{grad} g = (y, x). \end{cases}$$

grad $f \parallel$ grad g omm $\exists$ en <u>Lagrange multiplikator</u> $\lambda \in \mathbb{R}$ s.a. $\operatorname{grad} f = \lambda \cdot \operatorname{grad} g \iff (2x, 2y) = \lambda(y, x)$

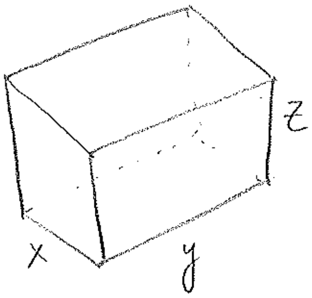
$$\iff \begin{cases} 2x = \lambda y \\ 2y = \lambda x \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \dfrac{2x}{y} \\ \lambda = \dfrac{2y}{x} \end{cases} \quad \text{Alltså } \frac{x}{y} = \frac{y}{x} \iff \boxed{x = \pm y.}$$

Men vi har $\underline{g(x,y) = 0} \iff \boxed{xy = 1}$, alltså
(Vi antog även $x>0, y>0$)

$x = y = 1$.

<u>Svar</u> Minimum av avståndet till origo på kurvan $xy = 1$ antas i $(1, 1)$.

Ex Vi ska tillverka en rektangulär box



Materialet kostar $1\,kr/cm^2$ för botten
$2\,kr/cm^2$ för sidorna
$5\,kr/cm^2$ för locket.

Villka mått ska boxen ha för att minimera kostnaden om volymen ska vara $96\,cm^3$?

Lösn. Vi vill minimera priset:

$$f(x,y,z) = \underbrace{xy\cdot 1}_{\text{botten}} + \underbrace{xy\cdot 5}_{\text{locket}} + \underbrace{2(yz+xz)\cdot 2}_{\text{sidorna}} =$$

$$= 6xy + 4yz + 4xz$$

med bivillkoret $V(x,y,z) = xyz = 96$. $\quad ((x,y,z) \neq \vec{0})$.

Lagranges ekvationer: $\operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} V$.

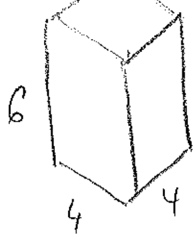
$$\begin{cases} 6y + 4z = \lambda yz \\ 6x + 4z = \lambda xz \\ 4y + 4x = \lambda xy \end{cases} \Rightarrow \frac{6y+4z}{yz} = \frac{6x+4z}{xz} = \frac{4y+4x}{xy} = \lambda$$

mult. med xyz:

$$\Rightarrow \begin{cases} (6y+4z)x = (6x+4z)y \\ (6x+4z)y = (4y+4x)z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{6yx} + 4zx = \cancel{6xy} + 4zy \\ 6xy + \cancel{4zy} = \cancel{4zy} + 4xz \end{cases}$$

$$\underset{z\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = y \\ 6y = 4z \quad (\Rightarrow z = \frac{6}{4}y) \end{cases}$$ Vi har villkoret $x\cdot y\cdot z = 96$,

alltså $\quad y\cdot y\cdot \frac{6}{4}y = 96 \Leftrightarrow y^3 = 16\cdot 4$. $\quad \boxed{\begin{matrix} y = x = 4 \\ z = 6 \end{matrix}}$

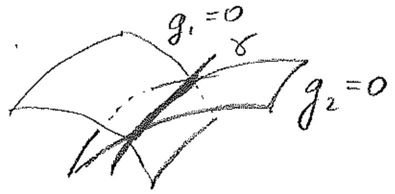


Flera bivillkor

Låt $\begin{cases} f: D_f \to \mathbb{R} \\ g_i: D_{g_i} \to \mathbb{R},\ i=1,..p \end{cases}$ vara C^1 med $D_f, D_{g_i}\ i=1,..p \subset \mathbb{R}^n$
$p < n$.

Antag att $f(\vec{x})$ antar max. eller min.
under bivillkoren $g_1(\vec{x}) = \dots g_p(\vec{x}) = 0$
i en inre punkt $\vec{a} \in D_f \cap D_{g_1} \cap \dots \cap D_{g_p}$.
Då gäller att $\operatorname{grad} f(\vec{a}), \operatorname{grad} g_1(\vec{a}), .. \operatorname{grad} g_p(\vec{a})$
är linjärt beroende.

Varför: Låt $p=2$ (allmänt fall likartat).



Om $\operatorname{grad} g_1(\vec{a}) \nparallel \operatorname{grad} g_2(\vec{a})$, så kan skärningskurvan γ parametriseras nära $\vec{a}$: $(x,y,z) = \vec{\gamma}(t)$, $\gamma(0) = \vec{a}$.

Om $f(\vec{x})$ antar max eller min. på $\vec{\gamma}(t)$ i pt $\vec{a}$, så

$$0 = \frac{d}{dt} f(\vec{\gamma}(t))\Big|_{t=0} = \operatorname{grad} f(\underbrace{\vec{\gamma}(0)}_{\vec{a}}) \cdot \vec{\gamma}'(0) = 0 \Rightarrow \operatorname{grad} f(\vec{a}) \perp \vec{\gamma}'(0).$$

Men $\operatorname{grad} g_1(\vec{a})$ och $\operatorname{grad} g_2(\vec{a})$ är också $\perp$ mot $\vec{\gamma}'(0)$,
alltså ligger $\operatorname{grad} g_1(\vec{a})$, $\operatorname{grad} g_2(\vec{a})$ och $\operatorname{grad} f(\vec{a})$
i samma plan.

Ex Bestäm minsta avståndet från origo till mängden

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 = 1 \text{ och } xy + xz = 2\}.$$

Lösning Vi vill minimera $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$
med bivillkoren $\begin{cases} g_1(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \\ g_2(x,y,z) = xy + xz - 2 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \text{grad } f = (2x, 2y, 2z) \\ \text{grad } g_1 = (2x, 4y, 0) \\ \text{grad } g_2 = (y+z, x, x) \end{cases}$$ Dessa är lin. beroende:

$$0 = \det \begin{pmatrix} x & y & z \\ x & 2y & 0 \\ y+z & x & x \end{pmatrix} = z\big(\underbrace{x^2 - 2y(y+z)}\big) + x\,(2xy - xy)$$

$$x^2 z - 2yz(y+z) + x^2 y$$

$$= (x^2 - 2yz)(y+z) = 0 .$$

Använder bivillkorna: ① $g_2 = x(y+z) = 2$, alltså $(y+z) \neq 0$,

och därför $x^2 - 2yz = 0$.

Kombinerar → med bivillkorna:

$$\begin{cases} x^2 = 2yz \\ x^2 + 2y^2 = 1 \\ x(y+z) = 2 \end{cases} \quad \overset{\text{algebra,}}{\underset{\text{Se boken}}{\Longleftrightarrow}} \quad \begin{cases} z = 2x \\ y = \frac{x}{4} \\ x(y+z) = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$x\left(\frac{x}{4} + 2x\right) = 2 \Rightarrow x = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad y = \frac{x}{4} = \frac{\sqrt{2}}{6}, \quad z = 2x = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

$$f\left(\pm\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} .$$