

Kap. 4.2 Optimering på icke-kompakta mängder.

Ex 1 Bestäm största och minsta värdet av funkt.

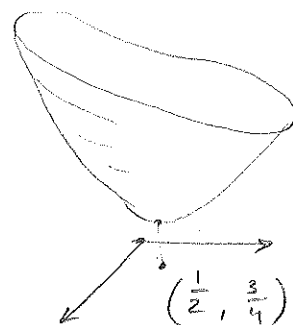
$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x - 3y + 2, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ (om de finns).}$$

Lös. Största värde existerar inte ty $f(x,y) \rightarrow \infty$ då $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$.

Minsta värde: Stationära punkter:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right).$$

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{8} \text{ är minsta värdet.}$$



Varför: Låt K vara den kompakta cirkelskivan $\{\sqrt{x^2 + y^2} \leq R\}$ där

R är så stor att $f(x,y) > 1$ för alla $(x,y): \sqrt{x^2 + y^2} \geq R$

(tag, t.ex., $R=100$). Eftersom funktionen f är kontin. på K , antas det minsta värdet i ngn punkt i K .

Eftersom $f \in C^1(\text{int } K)$, så antas det minsta värdet i en stationär punkt eller på randen. Men på randen har vi $f(x,y) > 1 > \frac{5}{8}$, ej minimum. Då antas min. över K

i den stationära punkten $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$. Men utanför K är $f(x,y) > 1$, så är detta den globala minimum.

Se fler exempel i boken, sid 164-168.

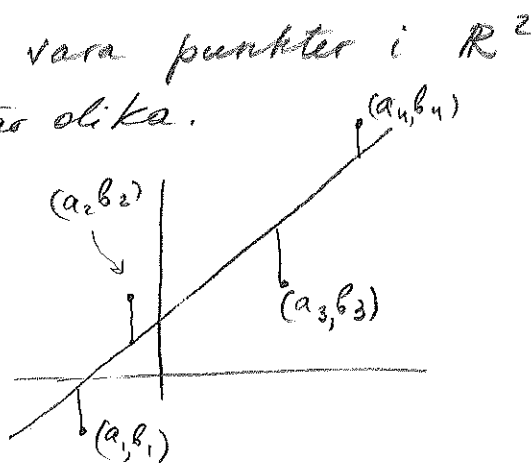
Minsta kvadratmetoden

Låt (a_i, b_i) $i=1, \dots, n$ vara punkter i $\mathbb{R}^2$ där $n \geq 2$ och minst två a_i är olika.

Välj linjen $y = kx + l$

Så att

$$Q(k,l) = \sum_{i=1}^n (b_i - (ka_i + l))^2 \text{ är som minst.}$$



($Q(k, l)$ är summan av kvadraterna av de vertikala avstånden från punkterna till linjen.

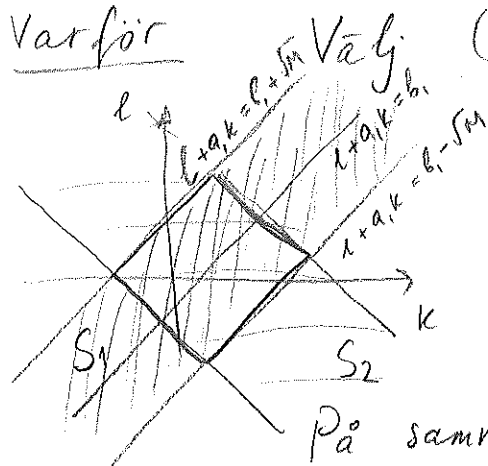
Givet data $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$ vill hitta ett approx. linjar samband.)

Sats Q har ett entydigt definierat minsta värde. (k, l) kan bestämmas ut systemet av normalekvationerna

$$\begin{cases} (\sum_{i=1}^n a_i^2)k + (\sum_{i=1}^n a_i)l = \sum_{i=1}^n a_i b_i \\ (\sum_{i=1}^n a_i)k + nl = \sum_{i=1}^n b_i \end{cases} \quad (*)$$

som har en lösning om det finns minst två olika a_i .

Varför Välj $(k_0, l_0) \in \mathbb{R}^2$, låt $M = 2Q(k_0, l_0)$.



Låt S_1 vara den slutna strimman i (k, l) -planet begränsad av linjerna $(ka_1 + l) - b_1 = \pm \sqrt{M}$
 $l = -a_1 k + b_1 \pm \sqrt{M}$

På samma sätt, låt $a_2 \neq a_1$, och låt S_2 vara en sluten strima sådan att $(ka_2 + l - b_2)^2 > M$ för $(k, l) \notin S_2$.
 finns då minst 2 a_i är olika; Tag dessa för a_1 och a_2 .

Då S_1 och S_2 är inte parallella,

$K = S_1 \cap S_2$ är kompakt.

Vi vet att $Q(k, l) > M$ för alla $(k, l) \notin K$.

Minsta värdet av $Q(k, l)$ på K är alltså det minsta värdet av Q på $\mathbb{R}^2$. Denna måste antas i en

stationär punkt eftersom på randen av K har vi $Q(k, l) \geq M$, och det finns en punkt $k_0, l_0 \in K$ s.d. $Q(k_0, l_0) = \frac{M}{2}$.

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial k} = 2 \sum (b_i - ka_i - l)(-a_i) = -2 \left(\sum a_i b_i + k \sum a_i^2 + l \sum a_i \right) \\ \frac{\partial Q}{\partial l} = 2 \sum (b_i - ka_i - l)(-1) = -2 \left(\sum b_i + k \sum a_i + l \cdot n \right) \end{cases}$$

Som ger (*)

Detta system har en entydig lösning (k, l) om

$$\det \begin{pmatrix} \sum a_i^2 & \sum a_i \\ \sum a_i & n \end{pmatrix} = \sum a_i^2 \cdot \sum 1^2 - \left(\sum a_i \cdot 1 \right)^2 =$$

$$= |a_1, \dots, a_n|^2 \cdot |1, \dots, 1|^2 - \left((a_1, \dots, a_n)(1, \dots, 1) \right)^2$$

Men om $(a_1, \dots, a_n) \neq (1, \dots, 1)$, så $(a_1, \dots, a_n) \cdot (1, \dots, 1) \neq |a_1| \cdot |1, \dots, 1|$
(Cauchy-Schwarz).

