

Kap. 4 Optimering

4.1 Optimering på kompakta områden.

Låt $K \subset \mathbb{R}^n$ vara en kompakt mängd.

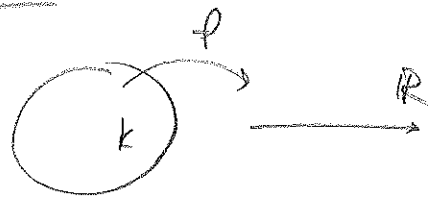
Antag $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig

Då antar f ett största värde M på K .

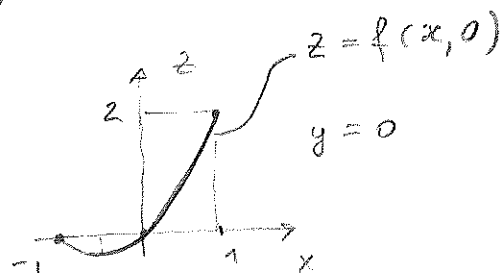
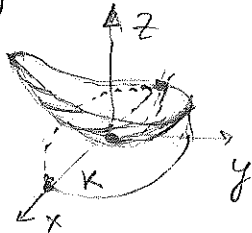
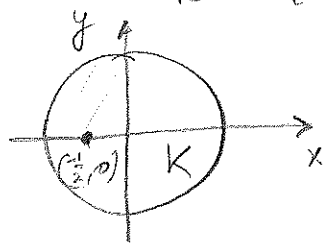
Antag dessutom att $f \in C^1(\text{int}(K))$

Om $f(\vec{a}) = M$ gäller: antingen

- eller
- (i) $\vec{a} \in \text{int } K$ och $\text{grad } f(\vec{a}) = \vec{0}$ (sats 2.11, sid 99)
 - (ii) $\vec{a} \in \partial K$ randen av K .



Ex Bestäm största och minsta värdet av
 $f(x, y) = x + x^2 + y^2$ på kompakta cirkelskivan
 $K = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.



i) Stationära punkter: $\text{grad } f = (1+2x, 2y) = (0, 0)$

$$\Leftrightarrow (x, y) = (-\frac{1}{2}, 0). \quad \boxed{f(-\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}}$$

ii) Funktionsvärden på randen:

(parametrisera randen: $(x, y) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$).

$$f(\cos t, \sin t) = \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = \cos t + 1.$$

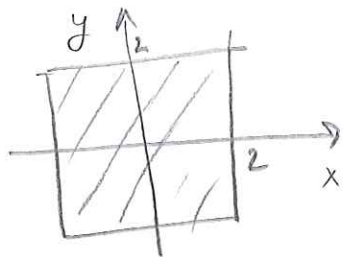
$$\text{max. värde: } t=0 \quad \boxed{f(1, 0) = 2}$$

$$\text{min. värde: } t=\pi. \text{ (här } x=-1, y=0) \quad \boxed{f(-1, 0) = 0}$$

$$\text{Svar: Minsta värde} = f(-\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Största värde} = f(1, 0) = 2.$$

Ex 2 $f(x,y) = e^{-\frac{1}{3}x^3 + x - y^2}$. Bestäm max. och min.-värde på $K = \{-2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}$



Stationära punkter:

$$\text{grad } f(x,y) = (-x^2 + 1, -2y) \cdot e^{-\frac{1}{3}x^3 + x - y^2} \neq 0$$

$$\text{grad } f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (1,0) \text{ eller } (-1,0)$$

$$f(-1,0) = e^{-\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1) - 0} = e^{-\frac{2}{3}}$$

$$f(1,0) = e^{-\frac{1}{3}(1)^3 + (1) - 0} = e^{\frac{2}{3}}$$

Värden på randen:

① övre kanten:

$$y=2, x \in [-2, 2], \varphi(x) := f(x, 2) = e^{-\frac{1}{3}x^3 + x - 4}$$

1-dim. optimeringsproblem på $[-2, 2]$.

1i) $\varphi' = -x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ ← krit. punkter.

$$\varphi(1) = e^{-10/3}$$

$$\varphi(-1) = e^{-14/3}$$

← min

1ii) randpunkter:

$$\varphi(-2) = e^{-10/3}$$

$$\varphi(2) = e^{-14/3}$$

Nedre kanten: $\varphi_1(x) := f(x, -2) = \varphi(x)$. Samma värden.

Högra kanten: $\varphi_2(y) := f(2, y) = e^{-\frac{2}{3} - y^2}$

$$\varphi_2'(y) = -2ye^{-\frac{2}{3} - y^2} = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

$$\varphi_2(0) = f(2, 0) = e^{-\frac{2}{3}}$$

$$\varphi_2(-2) = e^{-14/3}$$

$$\varphi_2(2) = e^{-14/3}$$

← min

randpunkter

Vänstra kanten:

$$\varphi_3(y) = f(-2, y) = e^{\frac{2}{3} - y^2}$$

$$\varphi_3'(y) = -2ye^{\frac{2}{3} - y^2} = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\varphi_3(0) = e^{2/3} = f(-2, 0)$$

$$\varphi_3(-2) = \varphi_3(2) = e^{-10/3} = f(-2, 2) = f(-2, -2)$$

← max

Svar $\max_{(x,y) \in K} f(x,y) = e^{2/3}, \min_{(x,y) \in K} f(x,y) = e^{-14/3}$