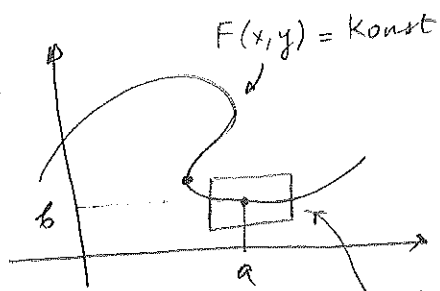


Kap. 3.4

Implicit givna funktioner.

Ex



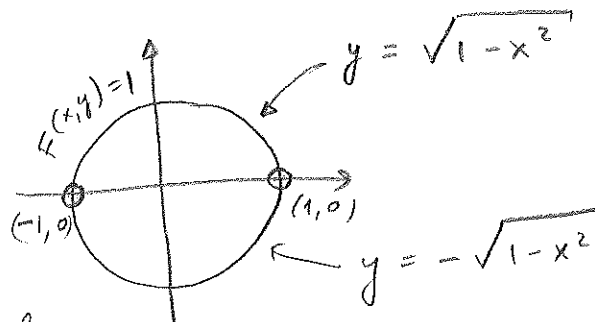
När kan vi representera kurvan
som graf $y = f(x)$ i en ^{öppen} omgivning
av en punkt (a, b)
på kurvan?

Ex

$$F(x, y) = x^2 + y^2.$$

$$F(x, y) = 1 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

Men punkter $(\pm 1, 0)$ har ingen
omgivning där $F(x, y)$ är graf
 $y = f(x)$. I dessa punkter $F'_y = 0$.

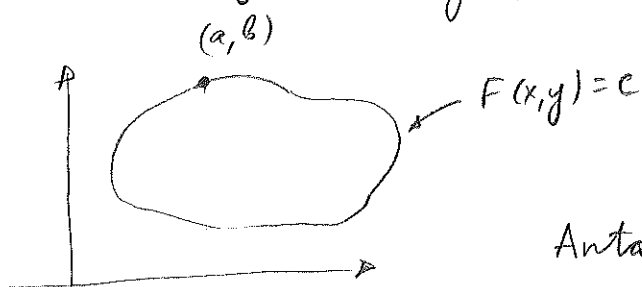


Sats 3 (Implicita funktionssatsen).

Låt $F(x, y)$ vara en C^1 -funktion, och (a, b) vara
en punkt på nivåkurvan $F(x, y) = C$. Om

$F'_y(a, b) \neq 0$,
så finns en öppen omgivning U av (a, b) s.a.
restriktionen av nivåkurvan till U implicit
definierar en C^1 -funktion $y = y(x)$.

Dessutom gäller $y'(x) = - \frac{F'_x(x, y(x))}{F'_y(x, y(x))}$. (*)



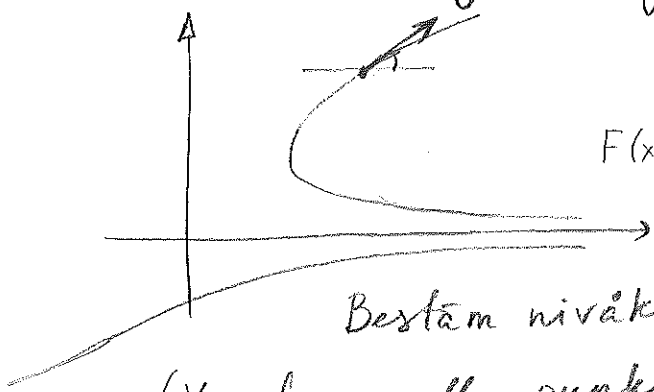
Antag att existensen av $y(x)$ är bevisad.

Beris av (*): Vi har: $F(x, y(x)) = C$ för x nära a .

$$0 = \frac{dF(x, y(x))}{dx} = F'_x(x, y(x)) + F'_y(x, y(x)) \cdot y'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(x) = - \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

Ex. $F(x,y) = y^5 - 4xy^2 + 1$



$$F(x,y)=0 \Leftrightarrow 4xy^2 - y^5 = 1 \Leftrightarrow 4(x-y^3)y^2 = 1.$$

Bestäm nivåkurvans lutning i $(\frac{33}{16}, 2)$.

(Verifiera att punkten ligger på kurvan:

$$F(\frac{33}{16}, 2) = 2^5 - 4 \cdot \frac{33}{16} \cdot 2^2 + 1 = 33 - 33 = 0 \text{ Ok}).$$

$$\begin{cases} F'_x = -4y^2; \\ F'_y = 5y^4 - 8xy. \end{cases}$$

$$F'_y(\frac{33}{16}, 2) = 5 \cdot 2^4 - 8 \cdot \frac{33}{16} \cdot 2 = 5 \cdot 16 - 33 = 47 \neq 0 \Rightarrow$$

nära $(\frac{33}{16}, 2)$ är nivåkurva grafen av $y = y(x)$.

$$F(x, y(x)) = 0 \Rightarrow F'_x(x, y(x)) + F'_y(x, y(x)) \cdot y'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(\frac{33}{16}, 2)} = - \frac{F'_x(\frac{33}{16}, 2)}{F'_y(\frac{33}{16}, 2)} = - \frac{-4 \cdot 2^2}{47} = \frac{16}{47}.$$

Ex. Kurvan ges av $F(x,y) = y - \sin(3x+4y) = 0$.

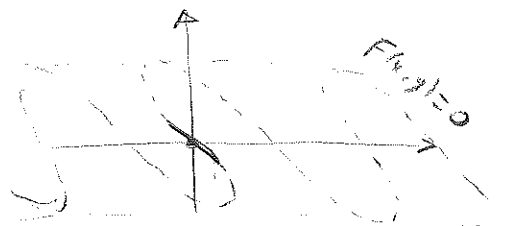
Vad är kurvans lutning i punkten $(0,0)$?

Lösning, Punkten $(0,0)$ ligger på kurvan ty $F(0,0) = 0$.

$$F'_y(x,y) = 1 - 4 \cos(3x+4y). \quad F'_y(0,0) \neq 0 \Rightarrow \text{kurvan kan lokalt representeras som graf av } y = y(x).$$

$$F'_x(x,y) = -3 \cos(3x+4y);$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{F'_x(0,0)}{F'_y(0,0)} = - \frac{-3 \cos 0}{1 - 4 \cos 0} = -1$$



OBS: om $F'_y(a,b) = 0$, men $F'_x(a,b) \neq 0$, kan man uttrycka funktionen som $x = x(y)$.

Ex. (Ten 2017, N 6).

Låt $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $g(x, y, z) = e^x - e^y - z^4$,

a) Visa att skärningskurvan mellan två nivåytor

$$\begin{cases} f(x, y, z) = \frac{9}{4} \\ g(x, y, z) = -1/16 \end{cases} \quad \text{nära punkten } (1, 1, \frac{1}{2}) := \vec{a}$$

kan uttryckas på formen $(x, y(x), z(x))$.

Lös. Antag att $y(x)$ och $z(x)$ finns, och derivera systemet $\begin{cases} f(x, y(x), z(x)) = \frac{9}{4} \\ g(x, y(x), z(x)) = -1/16 \end{cases}$

b) Beräkna $\frac{dy}{dx}$ och $\frac{dz}{dx}$ i $(1, 1, \frac{1}{2})$ m a p X:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z' = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} y' + \frac{\partial g}{\partial z} z' = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{*} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial x} \end{pmatrix} \quad \text{Vi kan lösa ut } (y', z') \text{ om}$$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} \neq 0 \text{ nära } \vec{a} \quad \left(\begin{array}{l} \text{det räcker att} \\ \det(\quad)|_{\vec{a}} \neq 0 \text{ för att} \\ \det(\quad) \text{ är kontinuerlig} \end{array} \right)$$

OBS Enligt satsen ovan, om $\det(\quad)|_{\vec{a}} \neq 0$, så finns C^1 -funktionerna $y(x)$ och $z(x)$.

I vårt fall är determinanten

$$\det \begin{bmatrix} 2y & 2z \\ -e^y & -4z^3 \end{bmatrix} \bigg|_{(1, 1, \frac{1}{2})} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -e & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = e - 1 \neq 0, \text{ alltså}$$

är $y(x)$ och $z(x)$ definierade nära $(1, 1, \frac{1}{2})$.

b) Vidare, $\textcircled{*}$ ger: $\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} \bigg|_{\vec{a}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{bmatrix}^{-1} \bigg|_{\vec{a}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} \end{pmatrix} \bigg|_{\vec{a}}$

$$\begin{pmatrix} y'(\vec{a}) \\ z'(\vec{a}) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -e & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ e \end{pmatrix} = -\frac{1}{e-1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ e & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e+1}{e-1} \\ \frac{4e}{1-e} \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \\ \frac{\partial g}{\partial x} = e^x \end{cases}$$

Man skulle kunna derivera evt. (E) ovan implicit m.p. x .

Nu vet vi att kurvan kan skrivas som $y = y(x)$ för $x \approx 0$.
Sätt den in i (E) och
derivera:

$$y'(x) - \cos(3x + 4y(x)) \cdot (3 + 4y'(x)) = 0$$

$$y'(x) (1 - 4 \cos(3x + 4y(x))) = 3 \cos(3x + 4y(x))$$

Sätt in $x=y=0$: $y'(0) = \frac{3 \cos(0)}{1 - 4 \cos(0)} = -1.$

Motsvarighet för $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ (se sid. 151)

Om $F(x, y, z)$ är C^1 i en omgivning av en punkt $\vec{a}$,

$F(\vec{a}) = C$, och $F'_z(\vec{a}) \neq 0$. Då kan man

uttrycka nivåytan $F(x, y, z) = C$ nära punkt $\vec{a}$
som graf av en C^1 -funktion: $z = z(x, y)$.

Man får också $\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}$, $\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$. (**)

Varför (**): $F(x, y, z(x, y)) = \text{Const} \quad \forall x, y$ nära (a_1, a_2) .

Deriverar på x : $0 = F'_x(x, y, z(x, y)) + F'_z(x, y, z(x, y)) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$

Samma på y .

Se ex. 18 i boken, sid 151.

Sats Betrakta systemet

(sid. 153)

$$\begin{cases} F(x, y, z) = C \\ G(x, y, z) = D \end{cases}$$

där $F, G \in C^1$ nära en punkt $\vec{a}$,

C, D - konstanter,

$$F(\vec{a}) = C, G(\vec{a}) = D,$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3).$$

Antag att

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix} \bigg|_{(\vec{a})} \neq 0.$$

Då finns en omgivning av punkten $\vec{a}$ och C^1 -funktioner $x(z)$ och $y(z)$ s. d. $\begin{cases} F(x(z), y(z), z) = C \\ G(x(z), y(z), z) = D \end{cases} \quad \forall z \text{ nära } a_3$