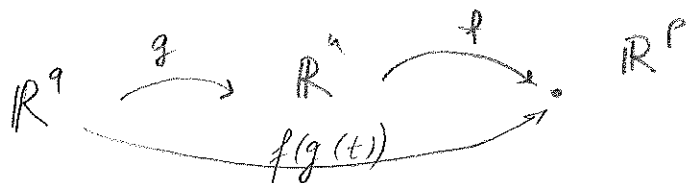


Kap. 3.3 Funktional determinanter



Kedjeregeln:

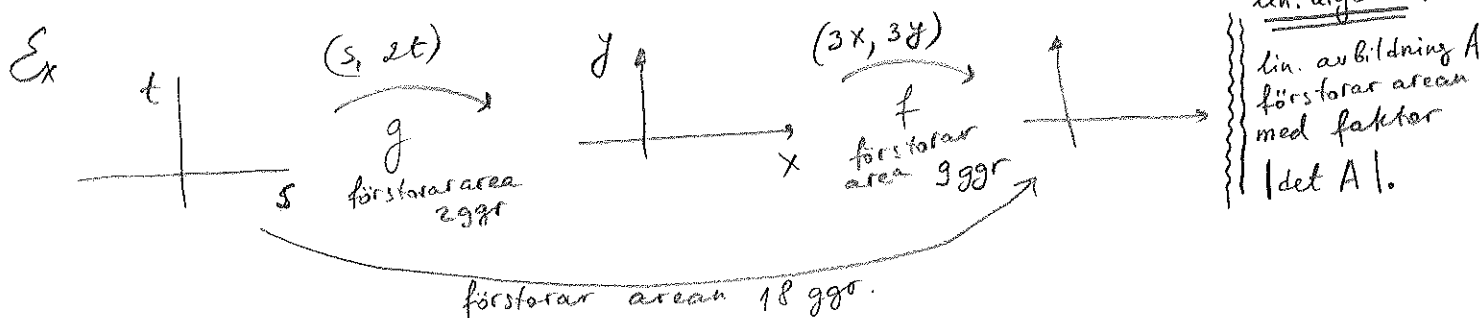
$$(\vec{f} \circ \vec{g})'(\vec{t}) = \vec{f}'(\vec{g}(\vec{t})) \cdot \vec{g}'(\vec{t})$$

Alltså $\boxed{\det(\vec{f} \circ \vec{g})'(\vec{t}) = \det \vec{f}'(\vec{g}(\vec{t})) \cdot \det \vec{g}'(\vec{t})}$

Om $\vec{g} = \vec{f}^{-1}$, så får vi

$$1 = \det Id = \det \vec{f}'(\vec{f}^{-1}(t)) \cdot \det(\vec{f}^{-1})'(t)$$

Alltså, $\det(\vec{f}^{-1})'(t) = \frac{1}{\det \vec{f}'(\vec{f}^{-1}(t))}$



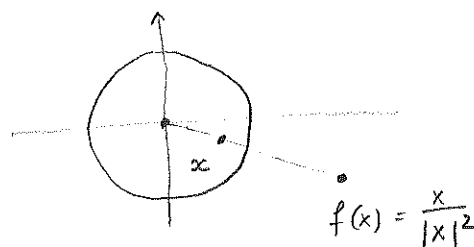
a) $\det \vec{f}' \cdot \det \vec{g}' = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 9 = 18 = \text{bra!}$

b) $\vec{f}(\vec{g}(s,t)) = (3s, 6t)$. $\det(\vec{f}(\vec{g}(s,t)))' = \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 18$

Ex. $\vec{g}(s,t) = (s, 2t)$; $\vec{g}^{-1}(x,y) = (x, \frac{y}{2})$

$$\boxed{\det(\vec{g}^{-1}(x,y))' = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} = \frac{1}{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} = \frac{1}{\det \vec{g}'(s,t)}} = \frac{1}{\det \vec{g}'(\vec{g}^{-1}(x,y))}$$

Ex. $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $\vec{x} \rightarrow \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^2}$ (inversion i enhetscirkeln)

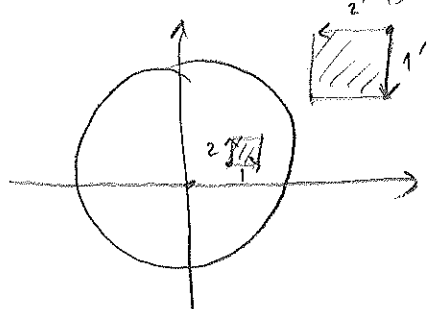


$$f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$$

$$f'(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{1 \cdot (x^2+y^2) - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-2y \cdot x}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{(x^2+y^2) - y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det f'(x,y) &= \frac{1}{(x^2+y^2)^4} \left[(-x^2+y^2)(x^2-y^2) - 4x^2y^2 \right] = \\ &= \frac{1}{(x^2+y^2)^4} \cdot (-x^4 - y^4 + 2x^2y^2 - 4x^2y^2) = \frac{1}{(x^2+y^2)^4} \cdot (-(x^2+y^2)^2) = \\ &= -\frac{1}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{1}{|\vec{x}|^4} \end{aligned}$$

Area förstoring nära punkt $\vec{x}$ är $\frac{1}{|\vec{x}|^4}$



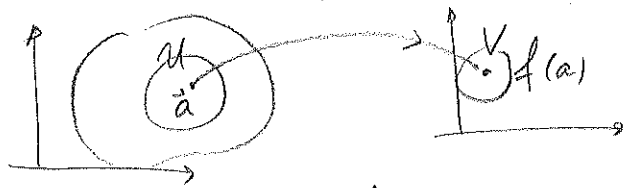
orientering byts, därför $\det f'(x,y) < 0$.

Sats (2, sid 144). Inversa funktionsatsen.

Antag att $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ öppen, $f \in C^1(D)$.

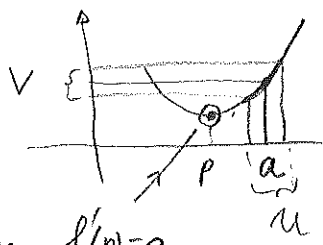
$\vec{a} \in D$, $\det f'(\vec{a}) \neq 0$.

Då finns öppna omgivningar U och V av $\vec{a}$, resp. $f(\vec{a})$, sådana att $f: U \rightarrow V$ är bijektiv och inversen $f^{-1}: V \rightarrow U$ är C^1 .



OBS Satsen är uppfylld lokalt nära a .

1-dim



p - "dålig", ty $f'(p) = 0$.