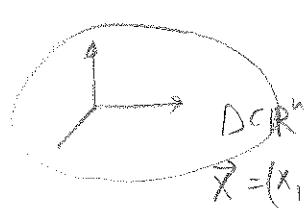


Kap. 3.2 Funktionalmatriser.

Tänk på $\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$.

Låt $f: D \rightarrow \mathbb{R}^p$, $D \subset \mathbb{R}^n$



$$\vec{f} = (f_1, \dots, f_p)$$



$$f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_p(\vec{x}))$$

Def Funktionalmatrisen eller derivatan av f är $p \times n$ -matrisen

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

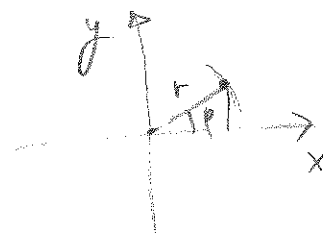
denna betecknas för $\vec{f}'(\vec{x})$ eller $\vec{D}f(\vec{x})$ eller $\frac{\partial (f_1, \dots, f_p)}{\partial (x_1, \dots, x_n)}$.

Ex För $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ har vi $f'(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \text{grad } f$.

Ex För en vektorvärd funkt. $\vec{x}(t)$, $t \in \mathbb{R}$,

$$\text{har vi } \vec{x}'(t) = \frac{d\vec{x}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_p}{dt} \end{pmatrix}$$

Ex $f(r, \varphi) = (x, y)$ där $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$



Funktional matris:

$$f'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

OBS: $\det f'(r, \varphi) = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r$.

Antag att $\vec{f}$ är C^1 (dvs, varje komponent $f_j(\vec{x})$ av $\vec{f}(\vec{x})$ är C^1). Då gäller $\forall j = 1, \dots, p$

$$f_j(\vec{x} + \vec{h}) = f_j(\vec{x}) + \frac{\partial f_j(\vec{x})}{\partial x_1} h_1 + \dots + \frac{\partial f_j(\vec{x})}{\partial x_n} h_n + |\vec{h}| \cdot \rho_j(\vec{h})$$

$\rho_j(\vec{h}) \rightarrow 0$ då $\vec{h} \rightarrow \vec{0}$.

Alltså,

$$\begin{pmatrix} f_1(\vec{x} + \vec{h}) \\ \vdots \\ f_p(\vec{x} + \vec{h}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_p(\vec{x}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} + |\vec{h}| \cdot \vec{\rho}(\vec{h})$$

där $\vec{\rho}(\vec{h}) \rightarrow \vec{0}$
då $\vec{h} \rightarrow \vec{0}$.

dvs $\vec{f}(\vec{x} + \vec{h}) = \vec{f}(\vec{x}) + \vec{f}'(\vec{x}) \cdot \vec{h} + |\vec{h}| \cdot \vec{\rho}(\vec{h})$

Fixera $\vec{x}$.

Def. Den lin. funkt. (av $\vec{h}$)

$$l: \vec{h} \rightarrow \vec{f}(\vec{x}) + \vec{f}'(\vec{x}) \vec{h}$$

kallas för linjäriseringen av $\vec{f}$ i punkten $\vec{x}$.

Linjärisera funktionen

Ex. $\vec{f}(x, y, z) = (xz^2, yz, x, z^4)$ i punkten $(1, 1, 1)$.

$$\vec{f}'(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_4}{\partial x} & \frac{\partial f_4}{\partial y} & \frac{\partial f_4}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^2 & 0 & 2xz \\ 0 & z & y \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4z^3 \end{pmatrix}$$

Ex. Med hjälp av funktionsmatriser kan kedjeregeln skrivas:

$$(\vec{f} \circ \vec{g})'(\vec{t}) = \vec{f}'(\vec{g}(\vec{t})) \cdot \vec{g}'(\vec{t})$$

$$\boxed{p}^q = \boxed{p}^n \boxed{n}^q$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial (f \circ g)}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial (f \circ g)}{\partial t_q} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial (f \circ g)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial (f \circ g)}{\partial x_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial t_q} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial t_q} \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

 $t \in \mathbb{R}^q$

$$\downarrow$$

 $\mathbb{R}^n \ni \vec{x} = g(t)$

$$\downarrow$$

 $\mathbb{R}^p$
 $u = f(g(t))$

Ex (se ex 9 sid 133).

$$\text{Låt } \vec{f}(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = (x^2 y^5, x^4).$$

Använd linjärisering kring punkten $(1, 1)$ för att bestämma en approximativ lösning till ekv.

$$\vec{f}(x, y) = (1, 1.1).$$

Analogi i 1-dim.



Söker lösn. till $f(x) = c$.

Vet att $f(x_0) = c$

linjäriseras kring x_0
och löser $l(x) = c$

Linjäriserar $\vec{f}$.

$$\vec{f}(1, 1) = (1, 1),$$

$$\vec{f}' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy^5 & 5x^2y^4 \\ 4x^3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{f}'(1, 1) = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Låt $\vec{h} = (h_1, h_2) = (x-1, y-1)$.

$$\vec{f}(\vec{h}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2h_1 + 5h_2 \\ 1 + 4h_1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Vi löser } \vec{f}(\vec{h}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.1 \end{pmatrix} : \quad \begin{cases} 1 + 2h_1 + 5h_2 = 1 \\ 1 + 4h_1 = 1.1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4h_1 = 0.1 \\ h_2 = -\frac{2h_1}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} h_1 = 0.025 \\ h_2 = -0.01 \end{cases}$$

Alltså, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+h_1 \\ 1+h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.025 \\ 0.99 \end{pmatrix}$ är en approximativ lösning.