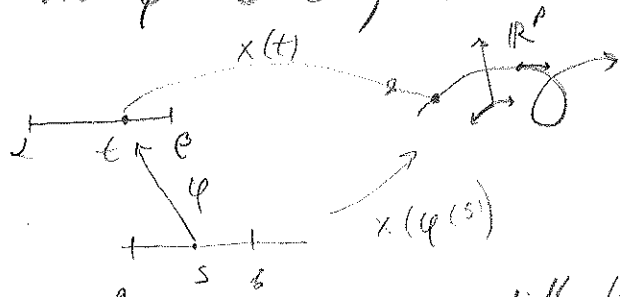


kap. 3

Differentialkalkyl för vektorvärda funktioner

k.3.1 Kurvor och ytor.

Kurvor Låt $\vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$ vara en C^1 -funktion, $[\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^p$ (dvs $\forall j, x_j(t) \in C^1([\alpha, \beta])$). Om $\varphi: [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ är en strängt växande funkt. s.a. φ och $\varphi^{-1} \in C^1$, så identifierar vi $t \mapsto \vec{x}(t)$ och $s \mapsto \vec{x}(\varphi(s))$



↑
annan parametrisering av samma kurva.

Def Tangentvektor till kurvan $\vec{x}$ i punkten $\vec{x}(t)$ är vektorn $\vec{x}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{x}(t+h) - \vec{x}(t)}{h} = (x_1'(t), \dots, x_p'(t))$

OBS $\left(\vec{x}'(\varphi(s)) \right)'_s = \frac{\vec{x}'(\varphi(s))}{\text{vektor}} \cdot \frac{\varphi'(s)}{\text{skalar}}$ har samma riktning som $\vec{x}'(\varphi(s))$.

Ex 1 Om $\vec{x}(t)$ är positionen för en partikel vid tidpunkten t , så är $\dot{\vec{x}}(t) =$ hastigheten vid tid t
 $|\dot{\vec{x}}(t)| =$ farten
 $\ddot{\vec{x}}(t) =$ accelerationen

Def Längden av kurvan $\vec{x} = \vec{x}(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, ges av

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\vec{x}'(t)| dt.$$



$$l = \sum_{i=1}^N |\vec{x}'(t_i)| \Delta t_i$$

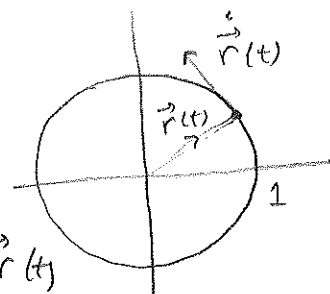
Ex $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

Hastighet $\dot{\vec{r}} = (-\sin t, \cos t)$

Fart $|\dot{\vec{r}}(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$

Acceleration $\ddot{\vec{r}}(t) = (-\cos t, -\sin t) = -\vec{r}(t)$

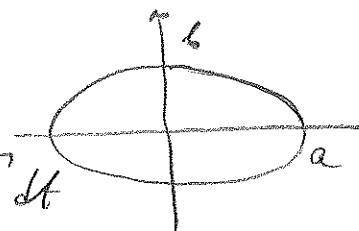
Längd $(\vec{r}) = \int_0^{2\pi} |\dot{\vec{r}}(t)| dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$



Ex 3. (Ellips)

$$r(t) = (a \cos t, b \sin t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\text{Längd}(r) = \int_0^{2\pi} |\dot{r}(t)| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt$$



$$= 4b E\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \text{ där}$$

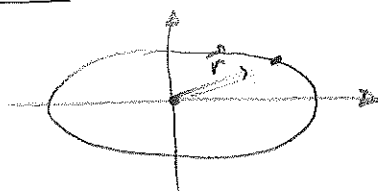
$$b^2 \left(\frac{a^2}{b^2} \sin^2 t + \cos^2 t \right) = b^2 \left(\underbrace{\left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right)}_{=: -k} \sin^2 t + 1 \right) = b^2 (1 - k \sin^2 t)$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k \sin^2 \theta} d\theta \quad \text{är en fullständig elliptisk integral av andra typen}$$

(kan ej uttryckas i elem. funkt.).

(spec., om $a = b$, har vi $k = 0$ och $\text{area} = 4b E(0) = 4b \cdot \frac{\pi}{2} = 2b\pi$)

Ex 4 i ex. ovan, $\ddot{r}(t) = -(a \cos t, b \sin t)$, alltså



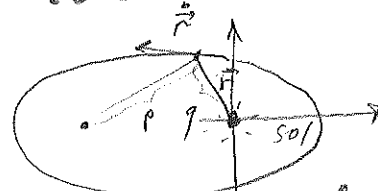
$$\ddot{r}(t) = -\dot{r}(t);$$

attraktionskraften riktad till mitten.

Keplers lagar

(Kepler 1571-1630. Matematiker, Astronom. i Prag. Analyserade Tycho Brahe's data. Uppgett en supernova 1604. 1601-)

① Planetbanorna är ellipser med solen i ena brännpunkten.



② Den av $\dot{r}(t)$ per tidsenhet översväpta arean är konstant

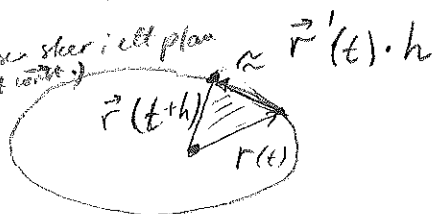
ellips: $p + q = \text{const.}$
kraften mot origo
centralrotations,

Varför Vi vet att $r''(t) = -C r(t)$.
attr. kraft/m

$$\frac{d}{dt} (\dot{r}(t) \times \dot{r}'(t)) = \dot{r}'(t) \times \dot{r}'(t) + \dot{r}(t) \times \ddot{r}(t) = \vec{0}$$

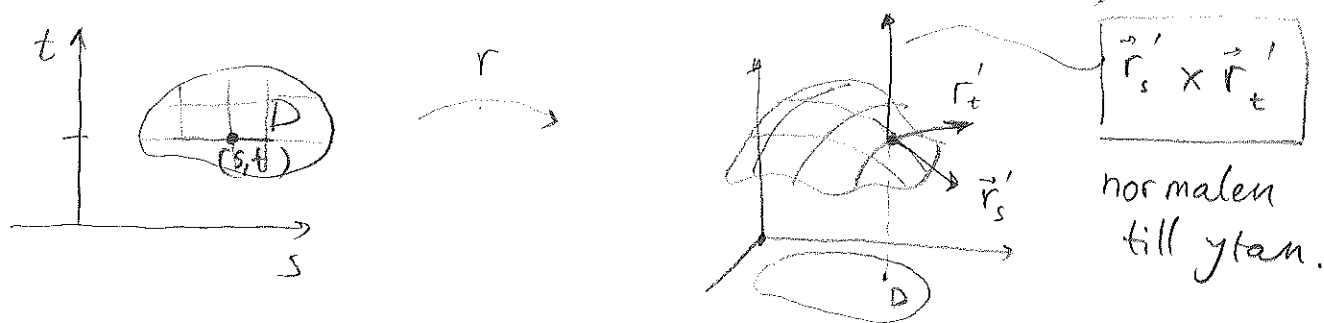
sid 122 = 0, se ovan.

Alltså, $\dot{r} \times \dot{r}'(t) = \text{const.}$ (vektor).
Area $\left(\frac{\Delta r}{r} \right) \approx \frac{1}{2} \dot{r} \times \dot{r}'(t)$.



③ Uttrycket $\frac{T^2}{a^3}$ har samma värde för alla planeter
där $T = \text{omloppstid}$, $a = \text{stora halvaxeln}$.

Ytor Låt $\vec{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ med $D \subset \mathbb{R}^2$,
 $r(s,t) = (x_1(s,t), x_2(s,t), x_3(s,t))$



Tangentplanet i punkten $\vec{r}(s,t)$ spänns upp

av $\vec{r}'_s = \left(\frac{\partial x_1}{\partial s}, \frac{\partial x_2}{\partial s}, \frac{\partial x_3}{\partial s} \right)$

och $\vec{r}'_t = \left(\frac{\partial x_1}{\partial t}, \frac{\partial x_2}{\partial t}, \frac{\partial x_3}{\partial t} \right)$.

Vektorn $\vec{r}'_s \times \vec{r}'_t$ är normal mot tangentplanet.

Ex Använd teorin ovan för att bestämma normalen till sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ genom pt. (a,b,c) med $c > 0$.

Betrakta övre halvplan.

Parametrisera den med (x,y)

$$\vec{r}(x,y) = \underbrace{(x,y)}_{\text{koord.}} \underbrace{\left(\sqrt{1-x^2-y^2} \right)}_{\text{param.}}$$

Vi har: $r'_x = \left(1, 0, -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right)$

$$r'_y = \left(0, 1, -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right)$$

$$r'_x \times r'_y = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 0 & 1 & -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{bmatrix} = e_1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + e_2 \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + e_3 = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1 \right) = \frac{1}{z} (x, y, z).$$

Normalen i pt (a,b,c) är $\vec{n} = \frac{1}{c}(a,b,c)$.

