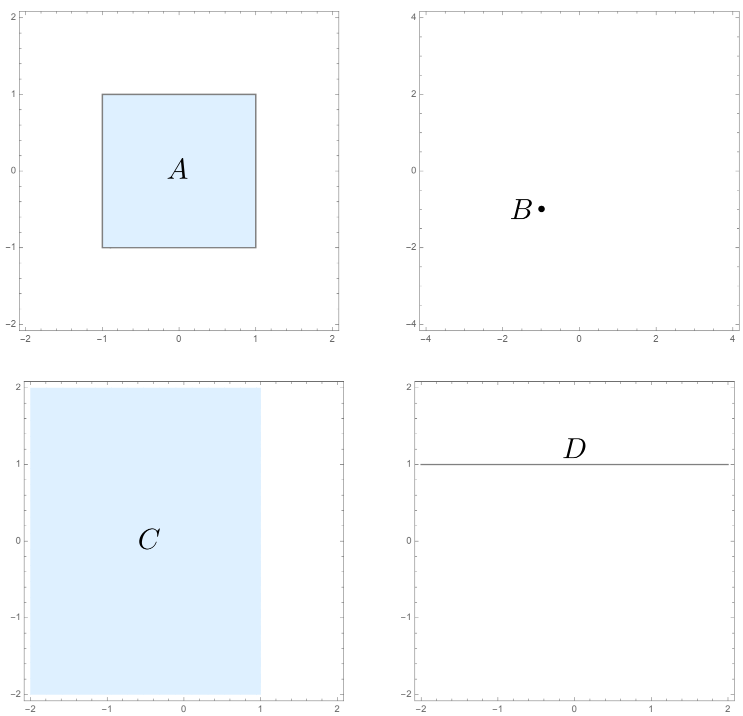
Tentamen: Lösningsförslag

Fredag 8 juni 2018 08:00-13:00
SF1674 Flervariabelanalys
Inga hjälpmedel är tillåtna.
Max: 40 poäng

1. (4 poäng) Rita följande mängder i $\mathbb{R}^2$:
   (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(|x|, |y|) \leq 1\}$.
   (b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2 \leq -4 - 4x - 4y - x^2 - y^2\}$.
   (c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 1\}$.
   (d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1\}$.

   Svar:



2. (4 poäng) Antag att funktionen $z = z(x, y)$ är implicit definierad nära punkten $(x, y, z) = (3, 1, 1)$ genom ekvationen $F(x, y, z) = xz^2 - 2yz - 1 = 0$. Beräkna $z'_x(3, 1)$ och $z'_y(3, 1)$.

   Lösning: Vi har $\nabla F = (z^2, -2z, 2xz - 2y)$ och således $\nabla F(3, 1, 1) = (1, -2, 4)$. Implicit derivering ger nu

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(3,1,1)} = -\left.\frac{F'_x}{F'_z}\right|_{(3,1,1)} = -\frac{1}{4}, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(3,1,1)} = -\left.\frac{F'_y}{F'_z}\right|_{(3,1,1)} = \frac{1}{2}.$$

Alternativ lösning: Om vi löser ut z från $xz^2 - 2yz - 1 = 0$ finner vi $z = \frac{y \pm \sqrt{x+y^2}}{x}$. Villkoret att $z(3,1) = 1$ ger att $z(x,y) = \frac{y+\sqrt{x+y^2}}{x}$ för (x,y) nära $(3,1)$. Vanlig derivering ger nu de sökta partiella derivatorna.
Svar: $z'_x(3,1) = -1/4$ och $z'_y(3,1) = 1/2$.

3. (4 poäng) Bestäm det största och det minsta värdet som funktionen

$$f(x,y) = (y-x)e^{x^2-y}$$

antar i området $x^2 \le y \le x$.

Lösning: Låt D vara området bestämt av $x^2 \le y \le x$. Stationära punkter bestäms av ekvationssystemet

$$\begin{cases} f'_x = (2x(y-x)-1)e^{x^2-y} = 0, \\ f'_y = (x-y+1)e^{x^2-y} = 0. \end{cases}.$$

Den andra ekvationen ger $y = x+1$ och efter insättning i den första ekvationen finner vi $2x - 1 = 0$. Alltså är $(1/2, 3/2)$ den enda stationära punkten och den ligger inte i D. Det följer att max och min värdena antas på randen av D. Randen av D består av kurvorna

$$\gamma_1: \ y = x, \quad 0 \le x \le 1, \quad \text{och} \quad \gamma_2: \ y = x^2, \quad 0 \le x \le 1.$$

På γ_1 är f identiskt lika med noll. På γ_2 har vi $f(x,x^2) = x^2 - x = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$ så max värdet är 0 min värdet är $-\frac{1}{4}$. Det följer att max och min värdena på hela D också är 0 respektive $-\frac{1}{4}$.
Svar: Största värdet är 0 och minsta värdet är $-\frac{1}{4}$.

4. (4 poäng) Beräkna integralen

$$\int_\gamma x^3 y dx + \cos(x) y dy$$

där kurvan γ ges av

$$\gamma: \ (t, \sqrt{t}), \quad 0 \le t \le \pi.$$

Lösning: Användning av parametriseringen $(x(t), y(t)) = (t, \sqrt{t})$, $0 \le t \le \pi$, ger

$$\begin{aligned} \int_\gamma x^3 y dx + \cos(x) y dy &= \int_0^\pi \left(x^3 y \frac{dx}{dt} + \cos(x) y \frac{dy}{dt} \right) dt \\ &= \int_0^\pi \left(t^{7/2} + \frac{\cos t}{2} \right) dt \\ &= \left[\frac{2t^{9/2}}{9} + \frac{\sin t}{2} \right]_0^\pi = \frac{2\pi^{9/2}}{9}. \end{aligned}$$

Svar: $\frac{2\pi^{9/2}}{9}$.

5. (4 poäng) Temperaturen i en punkt (x,y,z) i rummet ges av funktionen

$$T(x,y,z) = z^2 - xy.$$

Värmeflödet beskrivs av vektorfältet $\mathbf{v} = -k\nabla T$, där $k > 0$ är en konstant. Bestäm takten med vilken värme flödar genom ytan Σ, dvs bestäm värdet av dubbelintegralen

$$\int_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S},$$

där Σ är ytan i $\mathbb{R}^3$ som ges i cylindriska koordinater (r, φ, z) av

$$\Sigma: \; 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad z = \varphi,$$

orienterad så att normalen har positiv z-koordinat.

Lösning: Ytan Σ har parametriseringen

$$(x, y, z) = \mathbf{r}(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, \varphi), \qquad 0 \le r \le 1, \; 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

där vi använder (r, φ) som parametrar. Eftersom

$$\mathbf{r}'_r = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \qquad \mathbf{r}'_\varphi = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 1),$$

finner vi

$$d\mathbf{S} = (\mathbf{r}'_r \times \mathbf{r}'_\varphi) dr d\varphi = (\sin\varphi, -\cos\varphi, r) dr d\varphi.$$

Å andra sidan är $\mathbf{v} = -k\nabla T = -k(-y, -x, 2z)$ så

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(r, \varphi)) = \mathbf{v}(r\cos\varphi, r\sin\varphi, \varphi) = k(r\sin\varphi, r\cos\varphi, -2\varphi).$$

Detta ger

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 k(r\sin\varphi, r\cos\varphi, -2\varphi) \cdot (\sin\varphi, -\cos\varphi, r) dr d\varphi \\
&= k \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r\sin^2\varphi - r\cos^2\varphi - 2\varphi r) dr d\varphi \\
&= k\left(\int_0^1 r dr\right)\left(\int_0^{2\pi} (\sin^2\varphi - \cos^2\varphi - 2\varphi) d\varphi\right) \\
&= -\frac{k}{2}\left(\int_0^{2\pi} (\cos(2\varphi) + 2\varphi) d\varphi\right) \\
&= -\frac{k}{2}\left[\frac{\sin(2\varphi)}{2} + \varphi^2\right]_0^{2\pi} \\
&= -2k\pi^2.
\end{aligned}$$

Svar: $-2k\pi^2$.

6. (4 poäng) Beräkna för $s > 0$ derivatan av funktionen

$$F(s) = \int_{1/s}^{s} \frac{\sin(sx)}{x} dx.$$

Lösning: Detta är uppgift 5.4 i övningsboken. Integranden $\sin(sx)/x$ är C^1 för $s > 0$ och $x > 0$. För $s > 0$ kan vi därför derivera under integraltecknet vilket ger

$$F'(s) = \frac{\sin(sx)}{x}\bigg|_{x=s} - \frac{\sin(sx)}{x}\bigg|_{x=1/s} \frac{d}{ds}\frac{1}{s} + \int_{1/s}^{s} \frac{\partial}{\partial s}\frac{\sin(sx)}{x} dx$$

$$= \frac{\sin(s^2)}{s} + \frac{\sin(1)}{s} + \int_{1/s}^{s} \cos(sx)dx.$$

Eftersom

$$\int_{1/s}^{s} \cos(sx)dx = \left[\frac{\sin(sx)}{s}\right]_{x=1/s}^{s} = \frac{\sin(s^2)}{s} - \frac{\sin(1)}{s},$$

finner vi efter förenkling $F'(s) = \frac{2\sin(s^2)}{s}$.
Svar: $F'(s) = \frac{2\sin(s^2)}{s}$.

7. (4 poäng) Beräkna $\int_{\partial D}(x+\sqrt{y})ds$ där $D \subset \mathbb{R}^2$ är det begränsade området mellan linjen $y = x$ och kurvan $y = x^2$.

Lösning: Vi har $\partial D = \gamma_1 - \gamma_2$ där

$$\gamma_1: \ \mathbf{r}_1(t) = (t, t^2), \qquad 0 \le t \le 1,$$

och

$$\gamma_2: \ \mathbf{r}_2(t) = (t, t), \qquad 0 \le t \le 1.$$

Eftersom

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1}(x+\sqrt{y})ds &= \int_0^1 (t+\sqrt{t^2})|\mathbf{r}_1'(t)|dt = \int_0^1 2t|(1,2t)|dt \\ &= \int_0^1 2t\sqrt{1+4t^2}dt = \left[\frac{(1+4t^2)^{3/2}}{6}\right]_0^1 = \frac{5^{3/2}-1}{6}\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2}(x+\sqrt{y})ds &= \int_0^1 (t+\sqrt{t})|\mathbf{r}_2'(t)|dt = \int_0^1 (t+\sqrt{t})|(1,1)|dt \\ &= \sqrt{2}\int_0^1 (t+\sqrt{t})dt = \sqrt{2}\left[\frac{t^2}{2} + \frac{2t^{3/2}}{3}\right]_0^1 \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right) = \frac{7\sqrt{2}}{6},\end{aligned}$$

finner vi

$$\int_{\partial D}(x+\sqrt{y})ds = \left(\int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2}\right)(x+\sqrt{y})ds = \frac{5^{3/2}-1-7\sqrt{2}}{6}.$$

Svar: $\frac{5^{3/2}-1-7\sqrt{2}}{6}$

8. (4 poäng) E är ellipsoiden

$$E: \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

med utåtriktad normalvektor och $\mathbf{F}$ är fältet $(1, 2x, y)$. Beräkna

$$\iint (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} dS$$

över

(a) övre halvan av E,

Lösning: Detta är uppgift 10.58 i övningsboken. Låt γ vara ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ i xy-planet orienterad moturs. Stokes' sats ger

$$\iint_{E\cap\{z\geq 0\}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} dS = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Med hjälp av parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (a\cos t, b\sin t, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, av γ erhåller vi

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} (1, 2a\cos t, b\sin t) \cdot (-a\sin t, b\cos t, 0) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-a\sin t + 2ab\cos^2 t) dt \\
&= 2ab \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt = 2ab \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2} dt \\
&= 2ab \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{2\pi} = 2\pi ab.
\end{aligned}$$

Svar: $2\pi ab$.

(b) undre halvan av E,

Lösning: Stokes' sats ger

$$\iint_{E\cap\{z\leq 0\}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} dS = -\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -2\pi ab,$$

där vi har använt räkningen från (a) i andra steget.
Svar: $-2\pi ab$.

(c) hela E,

Lösning: Summering av svaren från (a) och (b) ger

$$\begin{aligned}
\iint_E (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} dS &= \left(\iint_{E\cap\{z\geq 0\}} + \iint_{E\cap\{z\leq 0\}}\right) (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} dS \\
&= 2\pi ab - 2\pi ab = 0.
\end{aligned}$$

Svar: 0.

(d) hela E med hjälp av divergenssatsen.

Lösning: Eftersom $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla \cdot (1, 0, 2) = 0$, så ger divergenssatsen

$$\iint_E (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} dS = \iiint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) dxdydz = 0.$$

Svar: 0.

9. (4 poäng) Låt $D \subset \mathbb{R}^2$ vara triangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$ och $(0,1)$. Är den generaliserade integralen

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{|x-y|}} dxdy$$

konvergent? Bestäm i så fall dess värde.

Lösning: Vi har $D = D_1 \cup D_2$ där D_1 är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$, $(1/2, 1/2)$ och D_2 är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(0,1)$, $(1/2,1/2)$. Det följer att

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{|x-y|}} dxdy = \iint_{D_1} \frac{1}{\sqrt{x-y}} dxdy + \iint_{D_2} \frac{1}{\sqrt{y-x}} dxdy.$$

Eftersom

$$D_1: \ 0 \le y \le 1/2, \quad y \le x \le 1-y,$$

finner vi

$$\begin{aligned}\iint_{D_1} \frac{1}{\sqrt{x-y}} dxdy &= \int_0^{1/2} \int_y^{1-y} \frac{1}{\sqrt{x-y}} dxdy = \int_0^{1/2} \left[2\sqrt{x-y}\right]_{x=y}^{1-y} dy \\ &= \int_0^{1/2} 2\sqrt{1-2y}dy = \left[-\frac{2}{3}(1-2y)^{3/2}\right]_0^{1/2} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Av symmetriskäl följer att dubbelintegralen $\iint_{D_2} \frac{1}{\sqrt{y-x}} dxdy$ också är lika med $2/3$; alternativt kan dubbelintegralen över D_2 beräknas direkt med hjälp av parametriseringen

$$D_2: \ 0 \le x \le 1/2, \quad x \le y \le 1-x.$$

Det följer att $\iint_D \frac{1}{\sqrt{|x-y|}} dxdy$ är konvergent och har värdet $4/3$.

Svar: $4/3$.

10. (4 poäng) Bestäm arean av den ellips som cylindern $x^2 + y^2 = 2x$ skär ut ur planet $2x + 3y + 6z = 60$.

Lösning: Ekvationen $x^2 + y^2 = 2x$, dvs $(x-1)^2 + y^2 = 1$, beskriver en cirkel med radie 1 centrerad i $(1,0)$. Så om vi låter D beteckna disken $(x-1)^2 + y^2 \le 1$ i xy-planet, så har ellipsskivan E vars area vi söker parametriseringen

$$E: \ \mathbf{r}(x,y) = \left(x, y, \frac{60 - 2x - 3y}{6}\right), \qquad (x,y) \in D.$$

Eftersom

$$\mathbf{r}'_x = (1, 0, -1/3), \qquad \mathbf{r}'_y = (0, 1, -1/2), \qquad \mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (1/3, 1/2, 1),$$

finner vi

$$dS = |\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y| dxdy = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{4} + 1} dxdy = \frac{7}{6} dxdy.$$

Alltså är

$$\text{Area}(E) = \iint_E dS = \iint_D \frac{7}{6} dxdy = \frac{7}{6}\text{Area}(D) = \frac{7\pi}{6}.$$

Svar: $7\pi/6$.