Tentamen

Fredag 8 juni 2018 08:00-13:00
SF1674 Flervariabelanalys
Inga hjälpmedel är tillåtna.
Max: 40 poäng

1. (4 poäng) Rita följande mängder i $\mathbb{R}^2$:
   (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(|x|, |y|) \leq 1\}$.
   (b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2 \leq -4 - 4x - 4y - x^2 - y^2\}$.
   (c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 1\}$.
   (d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1\}$.

2. (4 poäng) Antag att funktionen $z = z(x, y)$ är implicit definierad nära punkten $(x, y, z) = (3, 1, 1)$ genom ekvationen $F(x, y, z) = xz^2 - 2yz - 1 = 0$. Beräkna $z'_x(3, 1)$ och $z'_y(3, 1)$.

3. (4 poäng) Bestäm det största och det minsta värdet som funktionen
$$f(x, y) = (y - x)e^{x^2 - y}$$
antar i området $x^2 \leq y \leq x$.

4. (4 poäng) Beräkna integralen
$$\int_\gamma x^3 y dx + \cos(x) y dy$$
där kurvan γ ges av
$$\gamma : \ (t, \sqrt{t}), \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

5. (4 poäng) Temperaturen i en punkt (x, y, z) i rummet ges av funktionen
$$T(x, y, z) = z^2 - xy.$$
Värmeflödet beskrivs av vektorfältet $\mathbf{v} = -k\nabla T$, där $k > 0$ är en konstant. Bestäm takten med vilken värme flödar genom ytan Σ, dvs bestäm värdet av dubbelintegralen
$$\int_\Sigma \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S},$$
där Σ är ytan i $\mathbb{R}^3$ som ges i cylindriska koordinater (r, φ, z) av
$$\Sigma : \ 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad z = \varphi,$$
orienterad så att normalen har positiv z-koordinat.

6. (4 poäng) Beräkna för $s > 0$ derivatan av funktionen
$$F(s) = \int_{1/s}^{s} \frac{\sin(sx)}{x} dx.$$

7. (4 poäng) Beräkna $\int_{\partial D}(x+\sqrt{y})ds$ där $D \subset \mathbb{R}^2$ är det begränsade området mellan linjen $y = x$ och kurvan $y = x^2$.

8. (4 poäng) E är ellipsoiden

$$E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

med utåtriktad normalvektor och $\mathbf{F}$ är fältet $(1, 2x, y)$. Beräkna

$$\iint (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} dS$$

över

(a) övre halvan av E,

(b) undre halvan av E,

(c) hela E,

(d) hela E med hjälp av divergenssatsen.

9. (4 poäng) Låt $D \subset \mathbb{R}^2$ vara triangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$ och $(0,1)$. Är den generaliserade integralen

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{|x-y|}} dxdy$$

konvergent? Bestäm i så fall dess värde.

10. (4 poäng) Bestäm arean av den ellips som cylindern $x^2 + y^2 = 2x$ skär ut ur planet $2x + 3y + 6z = 60$.