Tentamen: Lösningsförslag

Torsdag 15 mars 2018 08:00-13:00
SF1674 Flervariabelanalys
Inga hjälpmedel är tillåtna.
Max: 40 poäng

1. (4 poäng) Avgör om följande gränsvärde existerar och beräkna gränsvärdet om det existerar:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{1}{2xy}-\frac{1}{xy(x+2)}\right).$$

Lösning: Vi har
$$\frac{1}{2xy}-\frac{1}{xy(x+2)}=\frac{1}{2y(x+2)}$$
så till exempel genom att använda uppskattningen
$$\left|\frac{1}{2y(x+2)}\right|\geq\frac{1}{6|y|}$$
vilken är giltig för alla x nära 0, ser vi att gränsvärdet då $(x,y)\to(0,0)$ inte existerar.
Svar: Gränsvärdet existerar inte.

2. (4 poäng) Bestäm alla andra ordningens partiella derivator till
$$f(x,y,z)=\sin(x^2+y^2)+xyz.$$

Lösning: Detta är uppgift 2.50 i övningsboken. Kedjeregeln ger förstaderivatorna
$$f'_x=\cos(x^2+y^2)2x+yz,\quad f'_y=\cos(x^2+y^2)2y+xz,\quad f'_z=xy.$$
och ytterligare derivering ger andraderivatorna
$$\begin{aligned}&f''_{xx}=-\sin(x^2+y^2)(2x)^2+2\cos(x^2+y^2),\\&f''_{yy}=-\sin(x^2+y^2)(2y)^2+2\cos(x^2+y^2),\quad f''_{zz}=0,\\&f''_{xy}=f''_{yx}=-\sin(x^2+y^2)(2y)(2x)+z,\quad f''_{xz}=f''_{zx}=y,\quad f''_{yz}=f''_{zy}=x.\end{aligned}$$
Svar: $\begin{cases}f''_{xx}=-4x^2\sin(x^2+y^2)+2\cos(x^2+y^2),\\f''_{yy}=-4y^2\sin(x^2+y^2)+2\cos(x^2+y^2),\quad f''_{zz}=0,\\f''_{xy}=f''_{yx}=-4xy\sin(x^2+y^2)+z,\quad f''_{xz}=f''_{zx}=y,\quad f''_{yz}=f''_{zy}=x.\end{cases}$

3. (4 poäng) Bestäm alla skärningspunkter mellan kurvorna $x^2-y^2=4$ och $xy=\sqrt{5}$. Bestäm också vinkeln mellan kurvorna i varje skärningspunkt.

Lösning: Skärningspunkterna är lösningar till ekvationssystemet
$$\begin{cases}x^2-y^2=4,\\xy=\sqrt{5}.\end{cases}$$

Om $x = 0$ så finns ingen lösning. Antag därför att $x \neq 0$. Andra ekvationen ger då att $y = \sqrt{5}/x$, vilket insatt i första ekvationen ger $x^2 - 5x^{-2} = 4$, dvs $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$. Detta är en andragradsekvation för x^2 med lösning $x^2 = 5$ (lösningen $x^2 = -1$ kasseras eftersom $-1 < 0$). Alltså är $x = \pm\sqrt{5}$, vilket ger de två skärningspunkterna $\pm(\sqrt{5}, 1)$.
För att bestämma vinkeln mellan kurvorna, låter vi $f(x, y) = x^2 - y^2$ och $g(x, y) = xy$. Vi har

$$\nabla f(x, y) = (2x, -2y), \qquad \nabla g(x, y) = (y, x),$$

så

$$\nabla f(x, y) \cdot \nabla g(x, y) = (2x, -2y) \cdot (y, x) = 0.$$

Eftersom gradienterna är ortogonala till nivåkurvorna följer det att kurvorna är ortogonala.
Svar: Kurvorna skär varandra i $(\sqrt{5}, 1)$ och $(-\sqrt{5}, -1)$. I båda fallen är kurvorna ortogonala.

4. (4 poäng) Bestäm värdet av $\displaystyle\int_0^2 \int_{x^3}^8 x^2 e^{-y^2}\, dydx$.

   Lösning: Byte av integrationsordning ger

$$\begin{aligned}\int_0^2 \int_{x^3}^8 x^2 e^{-y^2}\, dydx &= \int_0^8 \int_0^{y^{1/3}} x^2 e^{-y^2}\, dxdy = \int_0^8 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{y^{1/3}} e^{-y^2}\, dy \\ &= \int_0^8 \frac{y}{3} e^{-y^2}\, dy = \left[-\frac{e^{-y^2}}{6}\right]_0^8 = \frac{1 - e^{-64}}{6}.\end{aligned}$$

   Svar: $\frac{1-e^{-64}}{6}$.

5. (4 poäng) Är avbildningen

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2, \\ v = 2xy, \end{cases}$$

   bijektiv i en omgivning av $(1, 1)$? Beräkna $\dfrac{\partial u}{\partial x}(1, 1)$ och $\dfrac{\partial x}{\partial u}(0, 2)$.

   Lösning: Detta är uppgift 3.37 i övningsboken. Funktionalmatrisen för avbildningen $F : (x, y) \mapsto (u, v)$ ges av

$$F'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

   Eftersom

$$\det F'(1, 1) = \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 8 \neq 0,$$

   följer det av inversa funktionssatsen att avbildningen är bijektiv i en omgivning av $(1, 1)$. Denna räkningen ger också att

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, 1) = 2.$$

För att beräkna $\frac{\partial x}{\partial u}(0,2)$ använder vi formeln

$$(F^{-1})'(F(x,y)) = F'(x,y)^{-1},$$

vilken för $(x,y)=(1,1)$ ger (notera att $F(1,1)=(0,2)$)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(0,2) & \frac{\partial x}{\partial v}(0,2) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(0,2) & \frac{\partial y}{\partial v}(0,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial u}{\partial y}(1,1) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial v}{\partial y}(1,1) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alltså är $\frac{\partial x}{\partial u}(0,2) = 1/4$.
Svar: Ja, avbildningen är bijektiv i en omgivning av $(1,1)$ eftersom funktionaldeterminanten i $(1,1)$ är nollskild. Partiella derivatorna ges av $\frac{\partial u}{\partial x}(1,1) = 2$ och $\frac{\partial x}{\partial u}(0,2) = 1/4$.

6. (4 poäng) Bestäm kurvintegralen av vektorfältet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2y^3, e^{xy-x+z}, x+z^2)$$

längs cirkeln $x^2+z^2=1$ i planet $y=1$, där cirkeln är orienterad medurs sedd från origo.

Lösning: Den givna cirkeln är lika med randen ∂S av S, där S är den vertikalt stående disken

$$S = \{(x,1,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+z^2 \leq 1\}$$

med normal $\mathbf{N} = (0,1,0)$ pekandes i positiva y-riktningen. Enligt Stokes' sats gäller

$$\int_{\partial S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}dS.$$

En räkning ger

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = (-e^{xy-x+z}, -1, (y-1)e^{xy-x+z} - 3x^2y^2),$$

vilket innebär att

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = -1.$$

Alltså finner vi

$$\int_{\partial S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S -1dS = -\text{Area}(S) = -\pi.$$

Svar: $-\pi$.

7. (4 poäng) Avgör om följande påståendena är sanna eller falska. Motivering krävs inte. Det räcker att svara "sant" eller "falskt" på varje påstående.

(a) Om $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, är två punkter i rummet så är

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{a}-\mathbf{b}), \quad t \in [0,1],$$

en parametrisering av det raka linjesegmentet från $\mathbf{a}$ till $\mathbf{b}$.

Svar: Falskt. Den givna kurvan $\mathbf{r}(t)$ är en parametrisering av linjesegmentet från $\mathbf{a}$ till $2\mathbf{a}-\mathbf{b}$.

(b) Om $\mathbf{F} = (P, Q)$ är ett C^2-vektor fält definierat i en öppen delmängd D av $\mathbb{R}^2$ sådant att

$$Q'_x(x, y) = P'_y(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

så är $\mathbf{F}$ ett potentialfält i D.

Svar: Falskt. Påståendet gäller om D är ett enkelt sammanhängande område, men inte i allmänhet. Till exempel är $(P, Q) = \frac{(-y,x)}{x^2+y^2}$ ett fält som är C^2 i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ och uppfyller $Q'_x = P'_y$, men $\mathbf{F}$är inte ett potentialfält eftersom cirkulationen kring varje sluten kurva som går en gång runt origo i positiv led är $2\pi \neq 0$.

(c) Dubbelintegralen

$$\iint_{\{x^2+y^2\leq 1\}} \frac{1 + x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dxdy$$

är konvergent.

Svar: Falskt. Den är divergent eftersom $\frac{1+x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \geq \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ och integralen

$$\iint_{\{x^2+y^2\leq 1\}} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dxdy = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{r^2} dr$$

är divergent.

(d) Antag att funktionerna $f(s, x)$ och $f'_s(s, x)$ är kontinuerliga för $(s, x) \in \mathbb{R}\times[0, 1]$. Då är den s-beroende integralen $F(s) = \int_0^1 f(s, x)dx$ deriverbar på $\mathbb{R}$ och

$$F'(s) = \int_0^1 f'_s(s, x)dx.$$

Svar: Sant. Se Sats 1 på s. 184 i boken.

8. (4 poäng) Låt D vara en liksidig triangel med ena hörnet i origo sådan att

$$\oint_{\partial D} (xy^2 + x^3 e^x)dx + (x^2 y + 6x)dy = 9.$$

Vilken area har D?

Lösning: Greens sats ger

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D} (xy^2 + x^3 e^x)dx + (x^2 y + 6x)dy &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2 y + 6x) - \frac{\partial}{\partial y}(xy^2 + x^3 e^x) \right) dxdy \\ &= \iint_D (2xy + 6 - 2xy)dxdy = 6\,\text{Area}(D).\end{aligned}$$

Alltså är $\text{Area}(D) = 9/6 = 3/2$ oberoende av vilken form och position D har.
Svar: $3/2$.

9. (4 poäng) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 y, yz, xz)$ ut genom sfären med centrum i $(1, 0, 1)$ och radie 1.

Lösning: Låt B beteckna ett klot med centrum i $(1, 0, 1)$ och radie 1. Med hjälp av divergenssatsen kan det sökta flödet skrivas

$$\iint_{\partial B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_B \operatorname{div} \mathbf{F} dxdydz = \iint_B (x + 3x^2 y + z)dxdydz.$$

Vi har $\iint_B 3x^2y dxdydz = 0$ av symmetriskäl. Byte till de sfäriska koordinaterna $x = 1 + r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = 1 + r\cos\theta$, ger

$$\begin{aligned}\iint_B (x+z)dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 (1 + r\sin\theta\cos\varphi + 1 + r\cos\theta)r^2\sin\theta drd\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 (2r^2\sin\theta + r^3\sin^2\theta\cos\varphi + r^3\cos\theta\sin\theta)drd\theta d\varphi\end{aligned}$$

Termerna $r^3\sin^2\theta\cos\varphi$ och $r^3\cos\theta\sin\theta$ ger inga bidrag eftersom $\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi = 0$ och $\int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2\theta d\theta = 0$. Alltså finner vi flödet

$$\iint_{\partial B} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 r^2\sin\theta drd\theta d\varphi = 2\times \text{Volym av enhetsklotet} = \frac{8\pi}{3}.$$

Svar: $8\pi/3$.

10. (4 poäng) Låt $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ vara tre punkter i planet och betrakta funktionen

$$f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}-\mathbf{a}| + |\mathbf{x}-\mathbf{b}| + |\mathbf{x}-\mathbf{c}|, \qquad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^2.$$

(a) Visa att f är kontinuerlig i hela planet och C^1 i området $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$.

Lösning: Med $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$, har vi

$$\begin{aligned}f(x,y) = &\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} + \sqrt{(x-b_1)^2 + (y-b_2)^2} \\ &+ \sqrt{(x-c_1)^2 + (y-c_2)^2}.\end{aligned}$$

Funktionen $(x,y) \mapsto (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2$ är C^1 från $\mathbb{R}^2$ till $[0,\infty)$ och C^1 från $\mathbb{R}^2\setminus\{\mathbf{a}\}$ till $(0,\infty)$. Funktionen $t\mapsto\sqrt{t}$ är kontinuerlig på $[0,\infty)$ och C^1 på $(0,\infty)$. Eftersom funktionen $(x,y)\mapsto\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2}$ är sammansättningen av ovanstående två funktioner, så är den kontinuerlig på $\mathbb{R}^2$ och C^1 på $\mathbb{R}^2\setminus\{\mathbf{a}\}$. Eftersom f är summan av tre termer av den här typen, så följer att f är kontinuerlig på $\mathbb{R}^2$ och C^1 på $\mathbb{R}^2\setminus\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$.

(b) Visa att om $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2\setminus\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ är en stationär punkt till f, så är vinkeln mellan vilka två som helst av de tre vektorerna $\mathbf{x}-\mathbf{a}$, $\mathbf{x}-\mathbf{b}$, $\mathbf{x}-\mathbf{c}$ lika med $2\pi/3$.

Lösning: En räkning ger

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y) &= \left(\frac{x-a_1}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|} + \frac{x-b_1}{|\mathbf{x}-\mathbf{b}|} + \frac{x-c_1}{|\mathbf{x}-\mathbf{c}|}, \frac{y-a_2}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|} + \frac{y-b_2}{|\mathbf{x}-\mathbf{b}|} + \frac{y-c_2}{|\mathbf{x}-\mathbf{c}|}\right) \\ &= \mathbf{e}+\mathbf{f}+\mathbf{g}, \qquad \mathbf{x} = (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\},\end{aligned}$$

där $\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}$ är de tre enhetsvektorerna

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{a}}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|}, \quad \mathbf{f} = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{b}}{|\mathbf{x}-\mathbf{b}|}, \quad \mathbf{g} = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{c}}{|\mathbf{x}-\mathbf{c}|}.$$

Om $\mathbf{x}$ är en stationär punkt, dvs om $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$, så gäller således $\mathbf{e}+\mathbf{f}+\mathbf{g} = 0$. Eftersom $\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}$ har längd ett följer det att vinklarna mellan vilka två som helst av dessa vektorer är $2\pi/3$. Vi kan visa detta till exempel genom att välja ett nytt koordinatsystem orienterat så att $\mathbf{e} = (1, 0)$. I det nya koordinatsystemet är

$\mathbf{g} = -\mathbf{e} - \mathbf{f} = (-1 - f_1, -f_2)$ och alltså gäller $1 = (-1 - f_1)^2 + (-f_2)^2 = f_1^2 + f_2^2$, dvs $f_1 = -1/2$ och $f_2 = \pm\sqrt{3}/2$. Det följer att vi har antingen

$$\mathbf{e} = (1, 0), \quad \mathbf{f} = \Big(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \Big), \quad \mathbf{g} = \Big(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \Big),$$

eller

$$\mathbf{e} = (1, 0), \quad \mathbf{f} = \Big(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \Big), \quad \mathbf{g} = \Big(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \Big).$$

Så $\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}$ utgör hörnen i en liksidig triangel och påståendet följer.

Historisk kommentar: Om de tre vinklarna i triangeln med hörn i $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ alla är mindre än $2\pi/3$, så har f sitt globala minimum i den stationära punkten (som är entydigt bestämd). Problemet att hitta punkten i vilken f har sitt minimum ställdes av Pierre de Fermat (1607-1665) som en utmaning till Evangelisto Torricelli (1608-1647), uppfinnaren av barometern, och minimipunkten kallas därför för triangelns "Fermatpunkt".