

Lappskrivning 2: Lösningsförslag

Onsdag 28 feb 2018 10:15-11:45

SF1674 Flervariabelanalys

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Max: 12 poäng

Version A

1. (4 poäng) Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x+y+3)^2}$$

där D är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(2,0)$ och $(0,6)$.

Lösning: Eftersom

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 6 - 3x\}$$

finner vi

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{dxdy}{(x+y+3)^2} &= \int_0^2 \int_0^{6-3x} \frac{1}{(x+y+3)^2} dy dx = \int_0^2 \left[\frac{-1}{x+y+3} \right]_{y=0}^{6-3x} dx \\ &= \int_0^2 \left(\frac{-1}{9-2x} + \frac{1}{x+3} \right) dx = \left[\frac{\ln(9-2x)}{2} + \ln(x+3) \right]_0^2 \\ &= \frac{\ln 5}{2} + \ln 5 - \frac{\ln 9}{2} - \ln 3 = \frac{3}{2} \ln 5 - \ln 9 = \ln \frac{5\sqrt{5}}{9}. \end{aligned}$$

Svar: $\ln \frac{5\sqrt{5}}{9}$

2. (4 poäng) Beräkna

$$\int_0^4 \int_0^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} y dx dy dz$$

genom att byta till cylindriska koordinater.

Lösning: Integrationsmängden bestäms av olikheterna

$$0 \leq y \leq 3, \quad -\sqrt{9-y^2} \leq x \leq \sqrt{9-y^2}, \quad 0 \leq z \leq 4.$$

De första två av dessa olikheter beskriver övre hälften av disken med radie 3 centrerad i origo i xy -planet och denna mängd kan uttryckas i polära koordinater (r, φ) enligt

$$0 \leq r \leq 3, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

I de cylindriska koordinater (r, φ, z) (som vanligt definierade enligt $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$), ges således integrationsmängden av

$$0 \leq r \leq 3, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq z \leq 4.$$

Eftersom $dx dy dz = r dr d\varphi dz$ följer att den sökta trippelintegralen ges av

$$\begin{aligned}\int_0^4 \int_0^\pi \int_0^3 r \sin \varphi r dr d\varphi dz &= 4 \left(\int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \right) \left(\int_0^3 r^2 dr \right) \\ &= 4 \left[-\cos \varphi \right]_0^\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^3 = 4(1+1)9 = 72.\end{aligned}$$

Svar: 72.

3. (4 poäng) Bestäm max och min värdena för $f(x, y) = x^2 + y^2$ under bivillkoret $x^4 + y^4 = 1$.

Lösning: Låt $g(x, y) = x^4 + y^4$ så att bivillkoret är $g(x, y) = 1$. Eftersom

$$\nabla f = (2x, 2y), \quad \nabla g = (4x^3, 4y^3),$$

kan Lagranges ekvation $\nabla f = \lambda \nabla g$ skrivas

$$\begin{cases} 2x = \lambda 4x^3, \\ 2y = \lambda 4y^3, \end{cases}$$

dvs $x = 0$ eller $y = 0$ eller $\frac{1}{2\lambda} = x^2 = y^2$. Om $x = 0$ så ger bivillkoret att $y = \pm 1$. Om $y = 0$ så ger bivillkoret att $x = \pm 1$. Om $x^2 = y^2$ så har vi antingen $x = y$ eller $x = -y$, så bivillkoret ger

$$x^4 + (\pm x)^4 = 1 \implies x^4 = \frac{1}{2} \implies x = \pm 2^{-1/4}.$$

Det följer att f har extremvärden i de åtta punkterna

$$(0, \pm 1), \quad (\pm 1, 0), \quad (2^{-1/4}, \pm 2^{-1/4}), \quad (-2^{-1/4}, \pm 2^{-1/4}).$$

Eftersom

$$f(0, \pm 1) = f(\pm 1, 0) = 1, \quad f(2^{-1/4}, \pm 2^{-1/4}) = f(-2^{-1/4}, \pm 2^{-1/4}) = \sqrt{2},$$

följer det att max och min värdena för $f(x, y)$ under det givna bivillkoret är $\sqrt{2}$ respektive 1.

Alternativ lösning: Eftersom både $f(x, y)$ och $g(x, y) = x^4 + y^4$ är invarianta under speglingarna $(x, y) \mapsto (-x, y)$ och $(x, y) \mapsto (x, -y)$, så räcker det att studera värdena i första kvadranten $\{x \geq 0, y \geq 0\}$. Den del av kurvan $x^4 + y^4 = 1$ som ligger i första kvadranten kan parametriseras enligt $(x(t), y(t)) = (\sqrt{\cos t}, \sqrt{\sin t})$, $0 \leq t \leq \pi/2$. Alltså räcker det att bestämma maximum och minimum av

$$F(t) := f(x(t), y(t)) = \cos t + \sin t$$

för $t \in [0, \pi/2]$. Eftersom $F'(t) = -\sin t + \cos t$ så följer att det endast finns en kritisk punkt i $t = \pi/4$. Genom att jämföra värdet i den kritiska punkten med värdena i intervallets ändpunkter finner vi att max värdet är $F(\pi/4) = \sqrt{2}$ och att min värdet är $F(0) = F(\pi/2) = 1$.

Svar: Max värdet är $\sqrt{2}$ och min värdet är 1.

Version B

1. (4 poäng) Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{dx dy}{(x+y+1)^2}$$

där D är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(4,0)$ och $(0,8)$.

Lösning: Eftersom

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 8 - 2x\}$$

finner vi

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{dx dy}{(x+y+1)^2} &= \int_0^4 \int_0^{8-2x} \frac{1}{(x+y+1)^2} dy dx = \int_0^4 \left[\frac{-1}{x+y+1} \right]_{y=0}^{8-2x} dx \\ &= \int_0^4 \left(\frac{-1}{9-x} + \frac{1}{x+1} \right) dx = \left[\ln(9-x) + \ln(x+1) \right]_0^4 \\ &= \ln 5 + \ln 5 - \ln 9 - \ln 1 = 2 \ln(5/3). \end{aligned}$$

Svar: $2 \ln(5/3)$

2. (4 poäng) Beräkna

$$\int_0^4 \int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} y dx dy dz$$

genom att byta till cylindriska koordinater.

Lösning: Integrationsmängden bestäms av olikheterna

$$0 \leq y \leq 2, \quad -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}, \quad 0 \leq z \leq 4.$$

De första två av dessa olikheter beskriver övre hälften av disken med radie 2 centrerad i origo i xy -planet och denna mängd kan uttryckas i polära koordinater (r, φ) enligt

$$0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

I de cylindriska koordinater (r, φ, z) (som vanligt definierade enligt $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$), ges således integrationsmängden av

$$0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq z \leq 4.$$

Eftersom $dx dy dz = r dr d\varphi dz$ följer att den sökta trippelintegralen ges av

$$\begin{aligned} \int_0^4 \int_0^\pi \int_0^2 r \sin \varphi r dr d\varphi dz &= 4 \left(\int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \right) \left(\int_0^2 r^2 dr \right) \\ &= 4 \left[-\cos \varphi \right]_0^\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^2 = 4(1+1) \frac{8}{3} = \frac{64}{3}. \end{aligned}$$

Svar: $64/3$.

3. (4 poäng) Bestäm max och min värdena för $f(x, y) = x^2 + y^2$ under bivillkoret $x^4 + y^4 = 1$.

Lösning: Låt $g(x, y) = x^4 + y^4$ så att bivillkoret är $g(x, y) = 1$. Eftersom

$$\nabla f = (2x, 2y), \quad \nabla g = (4x^3, 4y^3),$$

kan Lagranges ekvation $\nabla f = \lambda \nabla g$ skrivas

$$\begin{cases} 2x = \lambda 4x^3, \\ 2y = \lambda 4y^3, \end{cases}$$

dvs $x = 0$ eller $y = 0$ eller $\frac{1}{2\lambda} = x^2 = y^2$. Om $x = 0$ så ger bivillkoret att $y = \pm 1$. Om $y = 0$ så ger bivillkoret att $x = \pm 1$. Om $x^2 = y^2$ så har vi antingen $x = y$ eller $x = -y$, så bivillkoret ger

$$x^4 + (\pm x)^4 = 1 \implies x^4 = \frac{1}{2} \implies x = \pm 2^{-1/4}.$$

Det följer att f har extremvärden i de åtta punkterna

$$(0, \pm 1), \quad (\pm 1, 0), \quad (2^{-1/4}, \pm 2^{-1/4}), \quad (-2^{-1/4}, \pm 2^{-1/4}).$$

Eftersom

$$f(0, \pm 1) = f(\pm 1, 0) = 1, \quad f(2^{-1/4}, \pm 2^{-1/4}) = f(-2^{-1/4}, \pm 2^{-1/4}) = \sqrt{2},$$

följer det att max och min värdena för $f(x, y)$ under det givna bivillkoret är $\sqrt{2}$ respektive 1.

Alternativ lösning: Eftersom både $f(x, y)$ och $g(x, y) = x^4 + y^4$ är invarianta under speglingarna $(x, y) \mapsto (-x, y)$ och $(x, y) \mapsto (x, -y)$, så räcker det att studera värdena i första kvadranten $\{x \geq 0, y \geq 0\}$. Den del av kurvan $x^4 + y^4 = 1$ som ligger i första kvadranten kan parametriseras enligt $(x(t), y(t)) = (\sqrt{\cos t}, \sqrt{\sin t})$, $0 \leq t \leq \pi/2$. Alltså räcker det att bestämma maximum och minimum av

$$F(t) := f(x(t), y(t)) = \cos t + \sin t$$

för $t \in [0, \pi/2]$. Eftersom $F'(t) = -\sin t + \cos t$ så följer att det endast finns en kritisk punkt i $t = \pi/4$. Genom att jämföra värdet i den kritiska punkten med värdena i intervallets ändpunkter finner vi att max värdet är $F(\pi/4) = \sqrt{2}$ och att min värdet är $F(0) = F(\pi/2) = 1$.

Svar: Max värdet är $\sqrt{2}$ och min värdet är 1.