Namn: .... Personnummer: ....

Övningslappskrivning 2: Lösningsförslag

Onsdag 28 feb 2018 10:15-11:45
SF1674 Flervariabelanalys
Inga hjälpmedel är tillåtna.
Max: 12 poäng

1. (4 poäng) Bestäm max och min värdena för $f(x,y) = x - y$ under bivillkoret $x^2 + 3y^2 = 2$.

   Lösning: Låt $g(x,y) = x^2 + 3y^2 - 2$ så att bivillkoret är $g(x,y) = 0$. Eftersom

   $$\nabla f = (1, -1), \qquad \nabla g = (2x, 6y),$$

   kan Lagranges ekvation $\nabla f = \lambda \nabla g$ skrivas

   $$\begin{cases} 1 = \lambda 2x, \\ -1 = \lambda 6y. \end{cases}$$

   Genom att eliminera λ ser vi att $y = -\frac{x}{3}$. Vi sätter in detta i ekvationen för bivillkoret:

   $$x^2 + 3\Big(-\frac{x}{3}\Big)^2 = 2 \quad \text{dvs} \quad x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

   Alltså har f extremvärden i punkterna

   $$\Big(\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\Big) \quad \text{och} \quad \Big(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\Big).$$

   Det följer att max och min värdena för $f(x,y)$ under det givna bivillkoret är

   $$f\Big(\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\Big) = 2\sqrt{\frac{2}{3}}, \qquad f\Big(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\Big) = -2\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

2. (4 poäng) Beräkna integralen

   $$\iint_D \frac{1}{(1+(3u+v)^2)^2} dudv$$

   där D ges av $u \geq 0$, $v \geq 0$, $0 \leq 3u + v \leq 1$.

   Lösning: D är en triangel i uv-planet med hörn i $(0,0)$, $(1/3, 0)$ och $(0,1)$. Låt $g(u,v) = 3u + v$ och $h(w) = \frac{1}{(1+w^2)^2}$. För $0 \leq w \leq 1$ så är

   $$G_w = \{(u,v) \in D \,|\, g(u,v) \leq w\},$$

en triangel med hörn i $(0,0)$, $(w/3,0)$ och $(0,w)$. Arean av G_w ges av $A(w) = w^2/6$. Integration med hjälp av nivåkurvor ger

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{1}{(1+(3u+v)^2)^2}dudv &= \iint_D h(g(u,v))dudv = \int_0^1 h(w)A'(w)dw \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(1+w^2)^2}\frac{w}{3}dw = -\frac{1}{6(1+w^2)}\bigg|_0^1 = \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

3. (4 poäng) I en rät cirkulär kon med höjd $h>0$ och basradie $R>0$ är densiteten proportionell mot avståndet till basytan och lika med 2 i konens spets. Bestäm konens massa.

Lösning: Vi inför cylindriska koordinater (r,φ,z) så att konens bas ligger i planet $z=0$ och konens spets befinner sig i punkten $(0,0,h)$. Densiteten ges av $\rho = 2z/h$. Om (r,φ,z) ligger på konens mantelyta så ser vi med hjälp av likformiga trianglar att

$$\frac{h-z}{r} = \frac{h}{R} \quad \text{dvs} \quad r = \frac{(h-z)R}{h}.$$

Alltså ges konen K i de cylindriska koordinaterna av

$$K: \quad 0 \le z \le h, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le r \le \frac{(h-z)R}{h}.$$

Vi finner att den totala massan är

$$\begin{aligned}M &= \iiint \rho dV = \iiint \rho r dr d\varphi dz = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{(h-z)R}{h}} \frac{2zr}{h} dr d\varphi dz \\ &= 2\pi \int_0^h \frac{2z}{h}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{\frac{(h-z)R}{h}} dz = 2\pi \int_0^h \frac{z}{h}\frac{(h-z)^2R^2}{h^2}dz \\ &= \frac{2\pi R^2}{h^3}\int_0^h (h^2z - 2hz^2 + z^3)dz = \frac{2\pi R^2}{h^3}\left(\frac{h^4}{2} - \frac{2h^4}{3} + \frac{h^4}{4}\right) = \frac{\pi R^2 h}{6}.\end{aligned}$$