Namn: ........................................................ Personnummer: ..........................................

# Lappskrivning 1: Lösningsförslag

Fredag 3 feb 2017 15:15-16:45
SF1674 Flervariabelanalys
Inga hjälpmedel är tillåtna.
Max: 12 poäng

## Version A

1. (4 poäng) Avgör om följande gränsvärde existerar och beräkna gränsvärdet om det existerar:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{(x-y)^4 + \sin^4 x}.$$

**Lösning:** Om $(x, y)$ går mot $(0, 0)$ längs med $x$-axeln blir gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \cdot 0}{(x-0)^4 + \sin^4 x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^4 + \sin^4 x} = 0.$$

Om $(x, y)$ istället går mot $(0, 0)$ längs med linjen $y = x$ så blir gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \cdot x}{(x-x)^4 + \sin^4 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{\sin^4 x} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}\right)^4 = 1^4 = 1.$$

Vi har funnit två olika riktningarna som ger olika gränsvärden. Alltså existerar inte det totala gränsvärdet.
**Svar:** Gränsvärdet existerar inte.

2. (4 poäng) Antag att temperaturen $T$ i punkten $(x, y)$ i $xy$-planet ges as

$$T(x, y) = x^2 - 2y^2.$$

(a) Gör en skiss av $xy$-planet som visar nivåkurvorna $T = 2$ och $T = 9$.

**Lösning:** Se Figur 1.

(b) I vilken riktning ska en myra som befinner sig i punkten $(2, -1)$ gå för att kyla ner sig så snabbt som möjligt?

**Lösning:** Vi vet att $T$ avtar som snabbast när man rör sig i riktningen $-\operatorname{grad} T$, där

$$\operatorname{grad} T(x, y) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}\right) = (2x, -4y)$$

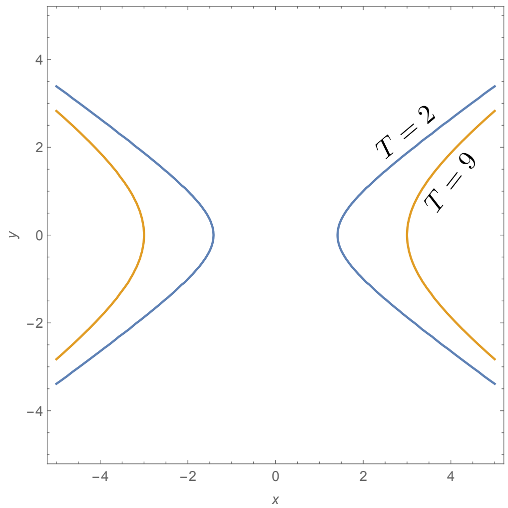
är gradienten till $T$. I punkten $(x, y) = (2, -1)$ finner vi $\operatorname{grad} T(2, -1) = (4, 4)$.
**Svar:** Myran ska gå i riktningen $(-4, -4)$.

(c) Vilken kurva genom $(2, -1)$ ska myran följa om den även fortsättningsvis vill uppleva maximal nedkylningstakt?

**Lösning:** Vi kan bestämma kurvan $(x(t), y(t))$ som myran ska följa genom att lösa differentialekvationen

$$(x'(t), y'(t)) = -\operatorname{grad} T(x(t), y(t)) \quad \text{dvs} \quad (x'(t), y'(t)) = (-2x(t), 4y(t)).$$

Den allmänna lösningen har formen $(x(t), y(t)) = (c_1 e^{-2t}, c_2 e^{4t})$, där $c_1$ och $c_2$ är konstanter. Genom att välja $c_1 = 2$ och $c_2 = -1$ får vi en kurva som uppfyller $(x(0), y(0)) = (2, -1)$.
**Svar:** Myran ska följa kurvan $(x(t), y(t)) = (2e^{-2t}, -e^{4t})$, $t \in \mathbb{R}$.




**Figur 1** *Nivåkurvorna $T = 2$ och $T = 9$ i $xy$-planet.*

3. (4 poäng) Hitta en lösning $f(x, y)$ till differentialekvationen

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

som uppfyller villkoret

$$f(0, y) = y \sin y, \qquad y > 0,$$

genom att byta till polära koordinater.

**Lösning:** Vi inför polära koordinater $(r, \varphi)$ som vanligt enligt

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Om vi använder att

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi = -y, \qquad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\cos\varphi = x,$$

så ger kedjeregeln

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Således ges differentialekvationen i polära koordinater av

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0.$$

Denna ekvationen har den allmänna lösningen $f(x, y) = g(r)$ där $g(r)$ är en godtycklig funktion av $r$. Vi bestämmer $g(r)$ genom att använda villkoret $f(0, y) = y \sin y$, $y > 0$, vilket ger $g(r) = r \sin r$. Alltså är

$$f(x, y) = r\sin r = \sqrt{x^2 + y^2}\sin\sqrt{x^2 + y^2}$$

en lösning med de önskade egenskaperna.
**Svar:** $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}\sin\sqrt{x^2 + y^2}$.