

1. Logik. En utsaga kan som bekant sättas samman av flera utsagor med hjälp av konnektiv. Utsagor som har en viss struktur blir då sanna för alla tilldelningar av sanningsvärden på de ingående utsagorna. Dessa kallas *tautologier*. Ett exempel på en tautologi är $p \vee \neg p$ eller $(p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg q)$. En annan typ av utsaga är den som alltid är falsk för alla tilldelningar, denna kallas då en *kontradiktion*, exempel på en kontradiktion är $p \wedge \neg p$ eller $(p \wedge \neg p) \vee (q \vee \neg q)$. Om en utsaga varken är tautologi eller kontradiktion (dvs det finns tilldelningar på ingående utsagorna p, q , etc som dels gör utsagan sann, dels gör den falsk) så kallas utsagan *kontingent*. Exempel på en kontingent utsaga kan vara $p \vee q$. För att visa att en utsaga är kontingent måste tilldelningar på de ingående utsagorna tas fram som dels gör utsagan sann dels andra värden på de ingående utsagorna som gör den falsk. Vi ser att utsagan $p \vee q$ är kontingent eftersom $p = \text{sann}$ gör hela utsagan sann respektive om $p = q = \text{falsk}$ gör hela utsagan falsk.

Betrakta nedanstående två utsagor:

$$p \vee ((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r))$$

$$(p \rightarrow \neg q) \wedge (q \rightarrow \neg p) \wedge (r \rightarrow p)$$

Ge en fullständig utredning som klargör vilka typer som dessa utsagor är av, dvs avgör, för båda utsagorna, om de är tautologier, kontradiktioner eller om de är kontingenta. Motivera fullständigt. Alla metoder är tillåtna, men som vanligt om sanningstabell används behövs utförliga förklaringar till varför alla slutsatser kan dras i din lösning.

Lösning: Vi betecknar en tautologi med $\top$. Den första utsagan är en tautologi eftersom

$$p \vee ((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)) \Leftrightarrow p \vee ((\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r))$$

$$p \vee (\neg p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow (p \vee \neg p) \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow \top \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow \top.$$

Vi har här använt att vi alltid har $\top \vee w \Leftrightarrow \top$ för alla logiska uttryck w .

Den andra utsagan

$$(p \rightarrow \neg q) \wedge (q \rightarrow \neg p) \wedge (r \rightarrow p)$$

kommer att vara kontingent. Det kan vi se genom att $(p \rightarrow \neg q) \wedge (q \rightarrow \neg p)$ innebär att både p, q måste vara falska för att den delen ska vara sann. Så hela utsagan blir sann om alla p, q, r sätts till falsk (implikationen $r \rightarrow p$ blir ju sann om förledet är falskt.) Vi kan givetvis också få utsagan falsk genom att bara ansätta $p = \text{sann}$ och $q = \text{falsk}$ så blir $(p \rightarrow \neg q) \wedge (q \rightarrow \neg p)$ falsk dvs hela utsagan är

$$(p \rightarrow \neg q) \wedge (q \rightarrow \neg p) \wedge (r \rightarrow p) \Leftrightarrow \perp \wedge (r \rightarrow p) \Leftrightarrow \perp$$

(oberoende av sanningsvärdet av r) dvs vi har funnit en tilldelning av sanningsvärden till p, q, r som gör den falsk. Sammantaget är alltså utsagan kontingent.

2. Mängdlära. Låt A, B vara två godtyckliga mängder med ändligt antal element. Visa att vi alltid har

$$|(A \times B) \cap (B \times A)| = |A \cap B|^2.$$

Lösning: Vi skriver n för talet $|A \cap B|$, då har vi förstås $|A \cap B|^2 = n^2$. Elementen (x, y) i $(A \times B) \cap (B \times A)$ är de som uppfyller

$$(x, y) \in (A \times B) \cap (B \times A) \Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \in B \times A \Leftrightarrow$$

$$x \in A \wedge y \in B \wedge x \in B \wedge y \in A \Leftrightarrow x \in A \cap B \wedge y \in A \cap B.$$

Vi har tidigare sett att $|A \cap B| = n$ och det finns alltså n stycken x och n stycken y i $A \cap B$ att välja på, varje val av ett par av $y \in A$ och $y \in B$ ger upphov till distinkta element i $(A \times B) \cap (B \times A)$ så att antalet element i $(A \times B) \cap (B \times A)$, dvs talet $|(A \times B) \cap (B \times A)|$ blir $n \cdot n = n^2$ men det var precis vad som skulle visas.

3. Funktioner. Låt funktionerna $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara givna av

$$f(x) = x^2 + 9 \quad \text{respektive} \quad g(x) = x - 9.$$

Finn alla $x \in \mathbb{R}$ som uppfyller $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

Lösning: Vi ska lösa ekvationen $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ så vi skriver ut vad vänster och höger led i den är:

$$VL = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 + 9 = (x - 9)^2 + 9 = x^2 - 18x + 81 + 9 = x^2 - 18x + 90$$

$$HL = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) - 9 = x^2 + 9 - 9 = x^2.$$

Ekvationen som vi ska lösa är nu $VL = HL$ och vi får

$$VL = x^2 - 18x + 90 = x^2 = HL \Leftrightarrow -18x + 90 = 0 \Leftrightarrow x = 90/18 = 5.$$

4. Inledande talteori. Låt n vara ett godtyckligt heltal. Visa att talen $13n + 4$ och $3n + 1$ är relativt prima.

Ledning: Det räcker med att du visar att det finns tal x, y sådana att $x \cdot (13n + 4) + y \cdot (3n + 1) = 1$. Det kan du göra ungefär som i Euklides utvidgade algoritm.

Lösning: Vi räknar som om vi skulle kört Euklides utvidgade algoritm:

$$13n + 4 = 4 \cdot (3n + 1) + n, \quad 3n + 1 = 3 \cdot n + 1 \Rightarrow 1 = 1 \cdot (3n + 1) - 3 \cdot n \Rightarrow$$

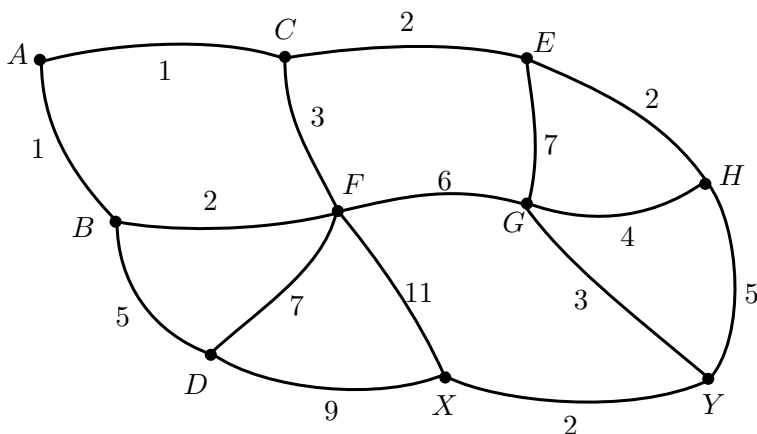
$$1 = 1 \cdot (3n + 1) - 3 \cdot (13n + 4 - 4 \cdot (3n + 1)) = (3n + 1) - 3 \cdot (13n + 4) + 12 \cdot (3n + 1) = 13 \cdot (3n + 1) - 3 \cdot (13n + 4),$$

alltså har vi

$$1 = x \cdot (3n + 1) + y \cdot (13n + 4)$$

för $x = 13$ respektive $y = -3$. Detta visar att $\gcd(13n + 4, 3n + 1) = 1$ vilket skulle visas.

7. Grafteori. Betrakta nedanstående viktade graf:



Utför Dijkstras algoritm för att hitta kortaste vägar från hörnet A i denna graf och ange alla delsteg och alla kandidatetiketter i algoritmen. Ange också vilka etiketter som väljs i varje delsteg. Ange sedan, med hjälp av etiketterna kortaste vägen från A till Y men också den kortaste vägen från A till X . Ange också dessa kortaste vägars kostnader.

Lösning: Dijkstras algoritm utförd på grafen ger följande kandidatetiketter (valda etiketter i **fet** stil):

Steg 0: **A(-,0)**

Steg 1: **B(A,1)**, **C(A,1)**

Steg 2: **D(B,6)**, **F(B,3)**, **E(C,3)**

Steg 3: **D(B,6)**, **X(F,14)**, **G(F,9)**, **H(E,5)**

Steg 4: **D(B,6)**, **X(F,14)**, **G(F,9)**, **Y(H,10)**

Steg 5: **X(F,14)**, **G(F,9)**, **Y(H,10)**

Steg 6: **X(F,14)**, **Y(H,10)**

Steg 7: **X(Y,12)**

Kortaste vägen från A till Y :

$$A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow Y \quad \text{Kostnad} = 10.$$

Kortaste vägen från A till X :

$$A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow Y \rightarrow X \quad \text{Kostnad} = 12.$$

8. Kombinatorik. Med utgångspunkt från att $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ för alla heltal $n \geq 0$, visa att

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

Ledning: Tänk på att $n - k = (n+1) - (k+1)$. Förläng båda led med $(n+1)$ och tänk på att $(n+1)n! = (n+1)!$.

Lösning: Vi arbetar med ekvivalenser och visar successivt att det som ska visas är ekvivalent med något som är sant. Det som ska visas är ekvivalent med

$$\sum_{k=0}^n \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} = 2^{n+1} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{(n+1)n!}{(k+1)k!(n-k)!} = 2^{n+1} - 1.$$

Med ledningen $n - k = (n + 1) - (k + 1)$ kan detta skrivas om som

$$\sum_{k=0}^n \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = 2^{n+1} - 1$$

som kan uttryckas

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} = 2^{n+1} - 1$$

som med summationsindex $j = k + 1$ kan skrivas

$$\sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} = 2^{n+1} - 1 \Leftrightarrow 1 + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} = 2^{n+1}.$$

Nu gäller förstås $\binom{n+1}{0} = 1$ så detta är slutligen ekvivalent med

$$\binom{n+1}{0} + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} = 2^{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} = 2^{n+1}$$

som är sant enligt det vi fick utgå från i uppgiften, fast med $n + 1$ istället för n (och så har vi ett annat namn på summationsindexet, j istället för k). Det som ska visas är alltså ekvivalent med denna sista utsaga som är sann och det betyder att det som ska visas också är sant vilket fullbordar beviset.