



CM1000 – DISKRET MATEMATIK, FX-SKRIVNING 2, MAJ 2023

Tillåtna hjälpmedel är ett A4-ark med egna anteckningar från kursen. Anteckningar får finnas på båda sidor av arket, men det måste vara precis ett A4 ark och anteckningarna måste vara *handskrivna*. Ingen form av miniräknare är tillåten och i allmänhet gäller KTHs regler för examination. I synnerhet *måste* alltid skrivningsvakternas instruktioner lydas. Om inget annat anges i uppgifterna krävs alltid tydliga, fullständiga och korrekta motiveringar.

Skrivtiden är 2 timmar och 45 minuter med start 15.15. Observera att all behandling av uppgifter ska ske under denna tid, annars rättas inte lösningarna. (Några har förlängd skrivtid och de har en annan sluttid.)

1. Logik. En utsaga kan som bekant sättas samman av flera utsagor med hjälp av konnektiv. Utsagor som har en viss struktur blir då sanna för alla tilldelningar av sanningsvärden på de ingående utsagorna. Dessa kallas *tautologier*. Ett exempel på en tautologi är $p \vee \neg p$ eller $(p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg q)$. En annan typ av utsaga är den som alltid är falsk för alla tilldelningar, denna kallas då en *kontradiktion*, exempel på en kontradiktion är $p \wedge \neg p$ eller $(p \wedge \neg p) \vee (q \vee \neg q)$. Om en utsaga varken är tautologi eller kontradiktion (dvs det finns tilldelningar på ingående utsagorna p, q , etc som dels gör utsagan sann, dels gör den falsk) så kallas utsagan *kontingent*. Exempel på en kontingent utsaga kan vara $p \vee q$. För att visa att en utsaga är kontingent måste tilldelningar på de ingående utsagorna tas fram som dels gör utsagan sann dels andra värden på de ingående utsagorna som gör den falsk. Vi ser att utsagan $p \vee q$ är kontingent eftersom $p = \text{sann}$ gör hela utsagan sann respektive $p = q = \text{falsk}$ gör hela utsagan falsk.

Betrakta nedanstående två utsagor:

$$p \vee ((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r))$$

$$(p \rightarrow \neg q) \wedge (q \rightarrow \neg p) \wedge (r \rightarrow p)$$

Ge en fullständig utredning som klargör vilka typer som dessa utsagor är av, dvs avgör, för båda utsagorna, om de är tautologier, kontradiktioner eller om de är kontingenta. Motivera fullständigt. Alla metoder är tillåtna, men som vanligt om sanningstabell används behövs utförliga förklaringar till varför alla slutsatser kan dras i din lösning.

2. Mängdlära. Låt A, B vara två godtyckliga mängder med ändligt antal element. Visa att vi alltid har

$$|(A \times B) \cap (B \times A)| = |A \cap B|^2.$$

3. Funktioner. Låt funktionerna $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara givna av

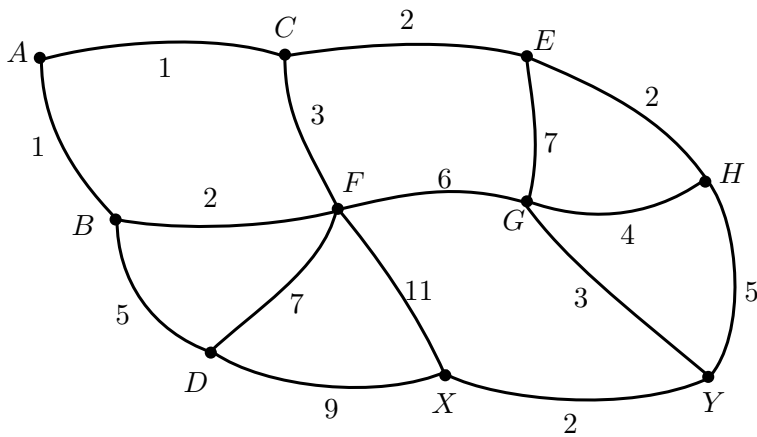
$$f(x) = x^2 + 9 \quad \text{respektive} \quad g(x) = x - 9.$$

Finn alla $x \in \mathbb{R}$ som uppfyller $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

4. Inledande talteori. Låt n vara ett godtyckligt heltal. Visa att talen $13n + 4$ och $3n + 1$ är relativt prima.

Ledning: Det räcker med att du visar att det finns tal x, y sådana att $x \cdot (13n + 4) + y \cdot (3n + 1) = 1$. Det kan du göra ungefär som i Euklides utvidgade algoritm.

7. Grafteori. Betrakta nedanstående viktade graf:



Utför Dijkstras algoritm för att hitta kortaste vägar från hörnet A i denna graf och ange alla delsteg och alla kandidatetiketter i algoritmen. Ange också vilka etiketter som väljs i varje delsteg. Ange sedan, med hjälp av etiketterna kortaste vägen från A till Y men också den kortaste vägen från A till X . Ange också dessa kortaste vägars kostnader.

8. Kombinatorik. Med utgångspunkt från att $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ för alla heltal $n \geq 0$, visa att

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

Ledning: Tänk på att $n-k = (n+1)-(k+1)$. Förläng båda led med $(n+1)$ och tänk på att $(n+1)n! = (n+1)!$.