

1. Logik. Avgör om följande härledning är korrekt:

1. $p \vee q \vee r$
 2. $\neg p \vee \neg q$
 3. $\neg q \vee \neg r$
 4. $\neg p \vee \neg r$
-
- $\therefore \neg p \rightarrow q \oplus r$

Om den är korrekt, bevisa det, om den inte är korrekt, ange en tilldelning av sanningsvärden till p, q, r som uppfyller premisserna men som ändå gör slutsatsen falsk. Alla metoder är tillåtna. Här betyder $\oplus$ exklusivt eller, alltså

$$q \oplus r \Leftrightarrow (q \vee r) \wedge \neg(q \wedge r).$$

Lösning: Vi studerar utsagorna i premisserna 1, 2, 3 och 4 i en sanningstabell för att få reda på när alla är uppfyllda samtidigt:

p	q	r	$p \vee q \vee r$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg q \vee \neg r$	$\neg p \vee \neg r$
s	s	s	s	f	f	f
s	s	f	s	f	s	s
s	f	s	s	s	s	f
s	f	f	s	s	s	s
f	s	s	s	s	f	s
f	s	f	s	s	s	s
f	f	s	s	s	s	s
f	f	f	f	s	s	s

Av tabellen ser vi att det är *tre* rader där alla premisser är uppfyllda, sanningstilldelningarna för p, q och r är på dessa rader **fetmarkerade**. Vi ska nu se om slutsatsen $\neg p \rightarrow q \oplus r$ är sann på dessa rader. Slutsatsen kommer att gälla och det kan vi inse på följande sätt. Slutsatsen är en implikation och en implikation är alltid sann om förledet (här $\neg p$) är falskt. På raden där p är sann blir förledet falskt dvs implikationen (slutsatsen) blir sann. På de två andra raderna där $\neg p$ är sann, dvs p har värdet falsk måste vi alltså på något vis inse att efterledet (dvs $q \oplus r$) är sant för att kunna dra slutsatsen att implikationen är sann. Men det gäller eftersom $q \oplus r$ är sann precis då q och r har *motsatta* sanningsvärden vilket vi kan se gäller på de aktuella raderna. (De två näst sista i tabellen.)

Sammantaget är slutsatsen sann på alla de rader där alla premisser är sanna vilket visar att härledningen är korrekt.

2. Mängdlära. Vi låter A, B, C beteckna godtyckliga mängder. Nedan anges två påståenden, det ena är sant för alla mängder och det andra är inte sant för alla mängder (det är alltså falskt). Bevisa det sanna påståendet och ange exempel på mängder som inte uppfyller det falska påståendet.

$$(A \cup B) - B = A,$$

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (B \cap C).$$

Du får inte använda Venndiagram men om du använder sanningstabell, var mycket noggrann med att ange precis vilka utsagor du studerar sanningsvärdena av och hur de relaterar till mängderna i fråga.

Lösning: Det första påståendet gäller inte för $A = \{1, 2\}$ och $B = \{2, 3\}$, vi får då

$$VL = (A \cup B) - B = (\{1, 2\} \cup \{2, 3\}) - \{2, 3\} = \{1, 2, 3\} - \{2, 3\} = \{1\} \quad \text{respektive} \quad HL = A = \{1, 2\}$$

uppenbart gäller inte $VL = HL$ varför det första påståendet är *falskt*.

Vi ska nu visa att det andra påståendet är sant och vi skriver därför om både VL och HL för sig. Vi börjar med VL:

$$VL = A \cap (B - C) = A \cap B \cap C^c.$$

Vi studerar nu HL:

$$HL = (A \cap B) - (B \cap C) = (A \cap B) \cap (B \cap C)^c = (A \cap B) \cap (B^c \cup C^c)$$

om vi använder distributiva lagen på det här mängduttrycket kan vi skriva om det som

$$((A \cap B) \cap B^c) \cup ((A \cap B) \cap C^c) = (A \cap B \cap B^c) \cup (A \cap B \cap C^c)$$

men eftersom $B \cap B^c = \emptyset$ (och därmed också $A \cap B \cap B^c = \emptyset$) så blir detta lika med

$$\emptyset \cup (A \cap B \cap C^c) = A \cap B \cap C^c$$

det vill säga samma uttryck som för VL. Alltså har vi visat $VL=HL$ så att påståendet är visat.

3. Funktioner. Om en funktion g har definitionsmängd E och värdemängd F och både E och F är ändliga mängder så gäller alltid att $|F| \leq |E|$. Utgå från detta och bevisa att om $f : A \rightarrow B$ är en bijektion mellan två ändliga mängder A, B så måste $|A| = |B|$.

Lösning: Eftersom f är en *funktion* från den ändliga A till den ändliga B gäller enligt förutsättningen

$$|B| \leq |A|$$

eftersom B också är f s värdemängd. Å andra sidan, eftersom f är en bijektion så är f inverterbar och det finns alltså en funktion $g : B \rightarrow A$ (vi kallar här inversen till f för g). Återigen, eftersom B, A är ändliga mängder får vi

$$|A| \leq |B|$$

eftersom A är g s värdemängd. Men olikheterna $|B| \leq |A|$ och $|A| \leq |B|$ tillsammans ger $|A| = |B|$ vilket fullbordar beviset.

4. Inledande talteori. Heltal kan skrivas på decimalform (som vi är mycket vana med) med sina siffror så att det godtyckliga heltalet $m > 1$ har

$$m = d_{k-1} \cdot 10^{k-1} + d_{k-2} \cdot 10^{k-2} + \dots + d_1 \cdot 10 + d_0,$$

där alltså de k talen $d_{k-1}, d_{k-2}, \dots, d_1, d_0$ kallas talets *siffror*. De uppfyller alla $0 \leq d_i \leq 9$. Exempel: talet 123 har siffrorna $d_2 = 1$, $d_1 = 2$ och $d_0 = 3$. Siffran d_0 kallas då *slutsiffra* eller *entalssiffra*. Visa att de möjliga entalssiffrorna för talet

$$n^2 - n$$

där n är ett godtyckligt positivt heltal endast kan vara 0, 2, eller 6.

Ledning: Arbeta med kongruenser (mod 10).

Lösning: Slutsiffran d_0 uppfyller $d_0 \equiv n^2 - n \pmod{10}$. För att se vilka möjliga värden detta kan anta kan vi testa med representanter ur alla restklasser $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}$, vi får vid räkning med restklasserna i $\mathbb{Z}_{10}$:

$$\begin{aligned} \overline{0^2 - 0} &= \bar{0}, & \overline{1^2 - 1} &= \bar{0}, & \overline{2^2 - 2} &= \bar{2}, & \overline{3^2 - 3} &= \bar{6}, & \overline{4^2 - 4} &= \bar{2} \\ \overline{5^2 - 5} &= \overline{25 - 5} = \bar{0}, & \overline{6^2 - 6} &= \overline{30 - 6} = \bar{4}, & \overline{7^2 - 7} &= \overline{42 - 7} = \bar{3}, & \overline{8^2 - 8} &= \overline{64 - 8} = \bar{6}, & \overline{9^2 - 9} &= \overline{72 - 9} = \bar{6} \end{aligned}$$

Av detta kan vi dra slutsatsen att slutsiffran i $n(n-1)$ (som är just resten som $n(n-1)$ ger vid division med 10) bara kan vara ett av talen 0, 2, och 6 vilket skulle bevisas.

5. Relationer. Låt $\mathcal{R}$ vara en ekvivalensrelation på mängden A och låt $\mathcal{S}$ vara en ekvivalensrelation på mängden B . Inför nu två nya relationer $\mathcal{T}_1$ och $\mathcal{T}_2$ på mängden $A \times B$ genom

$$(x_1, y_1)\mathcal{T}_1(x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1\mathcal{R}x_2 \wedge y_1\mathcal{S}y_2 \quad \text{respektive} \quad (x_1, y_1)\mathcal{T}_2(x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1\mathcal{R}x_2 \vee y_1\mathcal{S}y_2$$

En av relationerna $\mathcal{T}_1$ och $\mathcal{T}_2$ kommer inte nödvändigtvis att vara transitiv. Vilken är det? Du behöver inte bevisa exakt att en av relationerna inte är transitiv, men du behöver förklara varför relationen inte nödvändigtvis behöver vara transitiv. (Du får förstås inte använda resonemang som refererar till att detta är ett tentamensproblem, typ "eftersom tentan säger ...")

Lösning: Det är $\mathcal{T}_2$ som inte behöver vara transitiv. Anledningen blir tydlig om vi tar upp kravet på transitivitet i detalj, det är implikationen

$$(x_1, y_1)\mathcal{T}_2(x_2, y_2) \wedge (x_2, y_2)\mathcal{T}_2(x_3, y_3) \Rightarrow (x_1, y_1)\mathcal{T}_2(x_3, y_3).$$

Om vi skriver ut förledet fullständigt får det utseendet

$$((x_1\mathcal{R}x_2) \vee (y_1\mathcal{S}y_2)) \wedge ((x_2\mathcal{R}x_3) \vee (y_2\mathcal{S}y_3))$$

Transitiviteten faller om efterledet, det vill säga $(x_1, y_1)\mathcal{T}_2(x_3, y_3)$ inte är sant. Efterledet fullständigt utskrivet lyder

$$(x_1\mathcal{R}x_3) \vee (y_1\mathcal{S}y_3).$$

Vi ska nu övertyga oss om att även fast förledet (som vi såg ovan) är sant så skulle detta efterledet faktiskt kunna vara falskt. Svagheten ligger i disjunktionen: förledet skulle kunna vara sant genom att $(x_1\mathcal{R}x_2)$ och $y_2\mathcal{S}y_3$ vore sanna men att samtidigt så vore både $y_1\mathcal{S}y_2$ och $x_2\mathcal{R}x_3$ falska. Efterledet består av disjunktionen $(x_1\mathcal{R}x_3) \vee (y_1\mathcal{S}y_3)$ som vi vill visa vara sann genom att visa att någon av $(x_1\mathcal{R}x_3)$ och $(y_1\mathcal{S}y_3)$ vore sanna och detta vill vi normalt visa genom att utnyttja att relationerna $\mathcal{R}$ och $\mathcal{S}$ är transitiva, men som vi såg ovan är inte förutsättningarna i implikationerna som uttrycker dessa relationers transitivitet uppfyllda. Sammantaget behöver inte $(x_1\mathcal{R}x_3) \vee (y_1\mathcal{S}y_3)$ vara sann dvs $(x_1, y_1)\mathcal{T}_2(x_3, y_3)$ behöver inte följa av $(x_1, y_1)\mathcal{T}_2(x_2, y_2) \wedge (x_2, y_2)\mathcal{T}_2(x_3, y_3)$ varför $\mathcal{T}_2$ inte behöver vara transitiv.

6. Fördjupad talteori. Bevisa *välordningsprincipen* för de naturliga talen som kan formuleras så här: "varje icke-tom delmängd av de naturliga talen har ett minsta element." Utgå från att de naturliga talen är de positiva heltalen $(\{1, 2, 3, \dots\})$ och använd matematisk induktion.

Ledning: Visa först välordningsprincipen för *ändliga* mängder med $n \geq 1$ element, $n = 1, 2, 3, \dots$ med induktion över n , predikatet ska då formuleras så här:

$$A(n) \Leftrightarrow \text{Alla delmängder av } \mathbb{N} \text{ med } n \text{ element har ett minsta element.}$$

Utvidga sedan resonemanget även till mängder med oändligt antal element. Du kan göra det genom att basera dig på att principen gäller för alla ändliga mängder som du alltså visar först med matematisk induktion.

Lösning: Vi inför alltså predikatet

$$A(n) \Leftrightarrow \text{alla delmängder av } \mathbb{N} \text{ som har } n \text{ element har ett minsta element}$$

och vi ska nu visa $\forall n \geq 1 : A(n)$ med matematisk induktion, vi tar de tre stegen som föreskrivs av detta:

Steg 1. Är $A(1)$ sann? Ja, $A(1)$ säger att alla mängder som består av *precis ett* element har ett minsta element och det är ju sant, det enda ingående elementet i mängden med ett element måste ju då också vara det minsta. (Och samtidigt det största!)

Steg 2. Antag att $A(p)$ är sant, det vill säga antag att alla mängder med p element i $\mathbb{N}$ har ett minsta element – detta är induktionsantagandet. Låt nu M vara en godtycklig delmängd av $\mathbb{N}$ med $p + 1$ element. Välj ut ett element ur M , vilket som helst, vi kan kalla det x . Nu har vi alltså

$$M = \{x\} \cup (M - \{x\})$$

och mängden $M - \{x\}$ är en mängd med p element. Alltså har den ett minsta element enligt induktionsantagandet, kalla detta minsta element för y . Det är då klart att M har ett minsta element som blir det minsta av elementen x och y . Alltså har M ett minsta element och $A(p + 1)$ är alltså sann. Vi drar slutsatsen att implikationen $A(p) \Rightarrow A(p + 1)$ är sann vilket fullbordar steg 2 i beviset.

Steg 3. Steg 1 och 2 och principen för matematisk induktion fullbordar beviset av $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$, det vill säga alla ändliga icke-tomma delmängder av $\mathbb{N}$ har ett minsta element. Detta fullbordar induktionsdelen av beviset.

Vi behöver nu ett sista steg för att täcka in även oändliga mängder. Vi formulerar det så här: *Steg 4.* Steg 1-3 tar hand om alla *ändliga* delmängder av $\mathbb{N}$ men satsen uttrycker sig om alla mängder, vi måste alltså hantera fallet med oändliga mängder särskilt och visa att också de har ett minsta element. Men det är enkelt. Om M är en mängd med oändligt många element så kan vi bara välja något element $z \in M$ med egenskapen att det finns $x \in M$ med $x < z$. Det går eftersom M inte är tom. Bilda nu

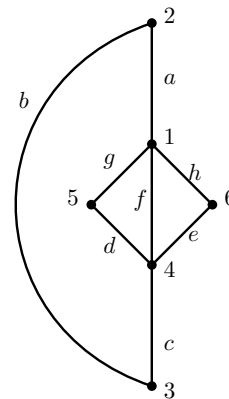
$$E = M - \{t \in M : t < z\}$$

det vill säga alla element i M som är mindre än z . Mängden E är då icke-tom och ändlig (eftersom den ligger i $\mathbb{N}$ och är uppåt begränsad) vilket innebär enligt första delen av det här beviset att det finns ett minsta element i E . Det är klart att detta minsta element också måste vara minsta element i hela M eftersom alla element i M som ligger i E är större. Alltså har M ett minsta element även i fallet då M har oändligt många element.

I båda fallet (då M är ändlig och icke-tom eller oändlig) har alltså M ett minsta element. Välordningsprincipen är därmed visad med hjälp av matematisk induktion.

7. Grafteori. Betrakta grafen till höger.

Grafen har 6 hörn numrerade från 1 till 6 och 8 kanter betecknade med bokstäverna a, b, c, d, e, f, g, h . Bevisa att grafen har en Eulerkrets men ingen Hamiltoncykel. (En *Eulerkrets* är en krets som går igenom grafen, återvänder till utgångshörnet och använder varje kant exakt en gång. En *Hamiltoncykel* är en cykel som går igenom grafen, återvänder till utgångshörnet och besöker varje hörn exakt en gång.)



Ledning: För att visa att en Eulerkrets finns behöver du bara ange hörnen i tur och ordning som cykeln går igenom. För att visa att det inte finns någon Hamiltoncykel, antag att det finns en Hamiltoncykel, visa sedan genom att hänvisa till egenskaper som grafen har att detta leder till en motsägelse. (Minns också att "cykel" innebär att hörn inte upprepas (förutom starthörnet som är lika med sluthörnet) men upprepade hörn är ok i en "krets".)

Lösning: För att visa att grafen har en Eulerkrets kan vi bara konstatera att hörnföljden

$$1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 1 - 6 - 4 - 1$$

ger en Eulerkrets eftersom varje kant används precis en gång och kretsen kommer tillbaka till utgångshörnet. (Vissa hörn går igenom flera gånger med det är ok med kretsar.)

För att visa att det inte finns någon Hamiltoncykel antar vi motsatsen, alltså att det finns en Hamiltoncykel som alltså går igenom grafen återvänder till utgångshörnet genom att gå igenom alla hörn precis en gång. Vi kan också utse hörnet 1 till start och sluthörn och konstatera att i Hamiltoncykeln kan 2, 3, 4 anses vara nästa tre hörn. Dessa måste ingå i cykeln och enda sättet att komma till 2 från 1 är via kanten a som alltså måste ingå, liknande resonemang gäller för hörnen 3 och 4 varför vi alltså har fastställt att

$$1 - 2 - 3 - 4$$

är de fyra första hörnen i Hamiltoncykeln. Nästa hörn kan inte vara 1 eftersom vi då inte skulle få med 5 eller 6 i cykeln. Nästa hörn måste alltså vara 5 eller 6. Antag att det är 5. Hamiltoncykelns första del har då alltså utseendet

$$1 - 2 - 3 - 4 - 5.$$

Här får vi dock en motsägelse igen eftersom den enda kant som leder från 5 går till 1 och då skulle vi ha haft Hamiltoncykeln

$$1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 1$$

vilket skulle utelämna 6. Alltså kan inte 5 komma efter 4. Men exakt samma motsägelse uppkommer om vi hade studerat fallet där 6 hade varit efterföljanden till 4 i den hypotetiska Hamiltoncykeln. (Här har bara hörnen 5 och 6 ombytta roller i exakt samma resonemang). Sammantaget leder antagandet om att det finns en Hamiltoncykel till en motsägelse och vi har alltså bevisat att det inte kan finnas några Hamiltoncykler i den givna grafen.

8. Kombinatorik. Hur många tresiffriga naturliga tal (alltså tal från och med 100 till 999) har *inte* siffran 7 i sig? (Talen 117, 757, 777 är tre exempel på tre tresiffriga tal som HAR siffran 7 i sig.)

Lösning: Vi studerar först tresiffriga *följder* av tal som alltså består av konstruktioner av typen 000, 007, 010, tillsammans med de vanliga talen från 100 till 999. Om vi först räknar ut antalet tresiffriga *följder* som inte har några 7:or i sig så får vi det antalet till

$$9 \cdot 9 \cdot 9 = 729.$$

Det följer av multiplikationsprincipen eftersom det finns precis 9 siffror att välja på när en följd av tre siffror ska konstrueras om vi inte ska välja siffran 7. Hur många av dessa finns i intervallet 00-99? Antalet blir $9 \cdot 9 = 81$ (som räknas ut på analogt sätt) och i intervallet 100 till 999 har vi alltså

$$729 - 81 = 648$$

som alltså blir antalet tresiffriga tal som inte innehåller någon 7:a.

9. Sannolikhetslära. Pilkastaren Anna är så pass skicklig att hon alltid kan träffa området som ger 20 poäng eller 60 poäng på en piltavla. Hon kan av någon utgrundlig anledning (som inte alls har med tentamenskonstruktion att göra) inte träffa några andra områden på piltavlan. Vid varje kast är det 10% chans att hon får 60 poäng och 90% chans att hon får 20 poäng. Hon kastar totalt tre pilar och varje pils poängtal är oberoende av andra pilars poängtal. Beräkna sannolikheterna att hennes totala poängtal uppgår till

(a) 60,

- (b) 100,
 (c) 140,
 (d) 180.

Det går utmärkt att avstå från att räkna ut de slutliga numeriska värdena (miniräknare är ju inte tillåten), men svaret ska ändå vara på en form som lätt kan beräknas med hjälp av en miniräknare.

Lösning: Vi inför händelserna

A = "Pil 1 träffar 60-poängsområdet."

B = "Pil 2 träffar 60-poängsområdet."

C = "Pil 3 träffar 60-poängsområdet."

Texten ger också $P(A) = P(B) = P(C) = 0.1$ och därmed $P(A^c) = P(B^c) = P(C^c) = 0.9$.

Vi tar de sökta sannolikheterna i (a)-(d) en i taget:

(a): Vi söker sannolikheten att alla pilar ger 20 poäng, vi söker alltså $P(A^c \cap B^c \cap C^c)$. Eftersom händelserna är oberoende är även deras komplement det så vi får

$$P(A^c \cap B^c \cap C^c) = P(A^c) \cdot P(B^c) \cdot P(C^c) = 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.9 = 0.9^3.$$

(b): Sannolikheten som är sökt i (b) är sannolikheten av en händelse som innebär att exakt en av pilarna ger 60 poäng. Det kan inträffa på precis 3 sätt: första pilen ger 60 poäng, andra ger 60 och tredje ger 60. Vi får addera dessa tre olika sannolikheter. Totala sannolikheten för denna händelse blir alltså

$$0.1 \cdot 0.9 \cdot 0.9 + 0.9 \cdot 0.1 \cdot 0.9 + 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.1 = 3 \cdot 0.1 \cdot 0.9^2$$

(c): Sannolikheten som är sökt i (c) kan uppfattas på ett sätt som är analogt med det i (b), men vi byter formuleringen till att "precis en av pilarna ska ge 20 poäng". Det kan också ske på tre sätt vilket återigen ger att den totala sannolikheten blir en summa av tre sannolikheter enligt

$$0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.9 + 0.9 \cdot 0.1 \cdot 0.1 + 0.9 \cdot 0.1 \cdot 0.1 = 3 \cdot 0.1^2 \cdot 0.9$$

(d): Slutligen ska vi beräkna sannolikheten att *alla* pilar ger 60 poäng, liksom i (a) får vi, men med sannolikheterna $P(A)$, $P(B)$ och $P(C)$ istället att den här sannolikheten är

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.1 = 0.1^3.$$

Anmärkning: summan av de tre sannolikheterna är

$$0.9^3 + 3 \cdot 0.1 \cdot 0.9^2 + 3 \cdot 0.1^2 \cdot 0.9 + 0.1^3$$

som enligt binomialsatsen kan skrivas som $(0.9 + 0.1)^3 = 1^3 = 1$ vilket uttrycker att någon av dessa händelser alltid kommer att inträffa, Anna kommer alltså alltid att få 60, 100, 140 eller 180 poäng.

10. För A. Kan även täcka område 2. Mängdlära. Låt A, B vara delmängder av samma universum. Om A, B uppfyller

$$(A - B) \times (B - A) \subset (A \times B)^c$$

vad kan vi då säga om A och B i förhållande till varandra? Gäller $A = B$? $A \subset B$? $B \subset A$? gäller båda av dessa, någon eller inte någon alls?

Lösning: Vi har

$$\begin{aligned} (A \times B)^c &= \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}^c = \{(a, b) : \neg(a \in A \wedge b \in B)\} = \\ &= \{(a, b) : \neg(a \in A) \vee \neg(b \in B)\} = \{(a, b) : a \in A^c \vee b \in B^c\} = \\ \{(a, b) : a \in A^c\} \cup \{(a, b) : b \in B^c\} &= \{(a, b) : a \in A^c \wedge (b \in B \vee b \in B^c)\} \cup \{(a, b) : (a \in A \vee a \in A^c) \wedge b \in B^c\} = \\ \{(a, b) : a \in A^c \wedge b \in B\} \cup \{(a, b) : a \in A^c \wedge b \in B^c\} &\cup \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B^c\} \cup \{(a, b) : a \in A^c \wedge b \in B^c\} = \\ \{(a, b) : a \in A^c \wedge b \in B\} \cup \{(a, b) : a \in A^c \wedge b \in B^c\} &\cup \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B^c\} = \\ (A^c \times B) \cup (A^c \times B^c) \cup (A \times B^c). \end{aligned}$$

Alltså kan förutsättningen skrivas om som

$$(A - B) \times (B - A) \subset (A^c \times B) \cup (A^c \times B^c) \cup (A \times B^c).$$

Antag nu att vi har ett element $(a, b) \in (A - B) \times (B - A)$. Eftersom $A - B \subset A$ och $B - A \subset B$ så gäller $a \in A$ respektive $b \in B$. Delmängdsrelationen innebär också att detta element (a, b) måste ligga i

$$(A^c \times B) \cup (A^c \times B^c) \cup (A \times B^c)$$

som som vi ser är en union av tre mängder. Alltså har vi

$$(a, b) \in (A^c \times B) \quad \text{eller} \quad (a, b) \in (A^c \times B^c) \quad \text{eller} \quad (a, b) \in (A \times B^c)$$

som också kan skrivas

$$a \in A^c \wedge b \in B \quad \text{eller} \quad a \in A^c \wedge b \in B^c \quad \text{eller} \quad a \in A \wedge b \in B^c$$

Men alla dessa tre varianter ger motsägelser eftersom vi alltid måste ha $a \in A$ respektive $b \in B$, vilket alternativ som än gäller så motsägs $a \in A \wedge b \in B$. Slutsatsen är att det alltså inte kan finnas något element alls i $(A - B) \times (B - A)$, alltså måste vi ha

$$(A - B) \times (B - A) = \emptyset \Rightarrow A - B = \emptyset \vee B - A = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B \vee B \subset A.$$

Antag omvänt att vi har $A \subset B \vee B \subset A$, då blir antingen $A - B = \emptyset$ eller $B - A = \emptyset$ vilket ger

$$(A - B) \times (B - A) = \emptyset$$

som automatiskt gör att

$$(A - B) \times (B - A) \subset (A \times B)^c$$

är uppfyllt. Sammanfattningsvis har vi alltså

$$(A - B) \times (B - A) \subset (A \times B)^c \Leftrightarrow A \subset B \vee B \subset A.$$