



FX-SKRIVNING 1

Tillåtna hjälpmedel är ett A4-ark med egna anteckningar från kursen. Anteckningar får finnas på båda sidor av arket, men det måste vara precis ett A4 ark och anteckningarna måste vara *handskrivna*. Ingen form av miniräknare är tillåten och i allmänhet gäller KTHs regler för examination. I synnerhet *måste* alltid skrivningsvakternas instruktioner lydas. Om inget annat anges i uppgifterna krävs alltid tydliga, fullständiga och korrekta motiveringar.

Skrivtiden är 2 timmar och 45 minuter med start 15.15. Observera att all behandling av uppgifter ska ske under denna tid, annars rättas inte lösningarna. (Några har förlängd skrivtid och de har en annan sluttid.)

1. Logik. Vi inför ett nytt konnektiv som vi kallar *Pierces pil*, $\downarrow$, genom

$$p \downarrow q \Leftrightarrow \neg(p \vee q).$$

Detta konnektiv motsvarar en "NOR"-grind i digitaltekniken. Visa att vi alltid har

$$(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow p) \Leftrightarrow p$$

för alla utsagor p, q . Alla metoder är tillåtna.

2. Mängdlära. Låt A, B, C, D beteckna godtyckliga mängder. Visa att följande formel alltid gäller:

$$(C - A) \times (B \cap D) = (A^c \times B) \cap (C \times D).$$

Ledning: Visa ekvivalensen

$$(x, y) \in (C - A) \times (B \cap D) \Leftrightarrow (x, y) \in (A^c \times B) \cap (C \times D).$$

Det räcker *inte* med att bara skriva $(C - A) \times (B \cap D) = (C \cap A^c) \times (B \cap D) = (A^c \cap C) \times (B \cap D)$, du behöver visa i detalj varför du kan skriva så här vilket troligen involverar studium av innehållet i mängderna i VL och HL på elementnivå (alltså visa ekvivalensen $(x, y) \in VL \Leftrightarrow (x, y) \in HL$). Som vanligt om sanningstabeller används måste får du inte blanda ihop utsagor och mängder och en text måste finnas med som beskriver hur sanningstabellerna används för att dra den slutsats som ska dras.

3. Funktioner. Betrakta funktionen

$$f(x) = \frac{(x + |x|)^2}{4}$$

definierad på en delmängd $A \subset \mathbb{R}$ så att $f : A \rightarrow \mathbb{R}^+$. ($\mathbb{R}^+$ betyder alla reella tal ≥ 0 .) Finns det någon största mängd A som är ett intervall för vilket f är inverterbar? Ange i så fall detta intervall och denna invers.

Ledning: Minns att

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{då } x \geq 0 \\ -x, & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

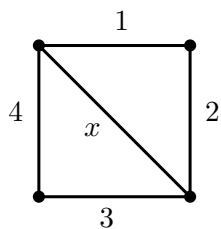
4. Inledande talteori. Låt $a, b, n > 1$ vara godtyckliga heltal (det är bara n som behöver vara > 1 , a, b kan vara vilka heltal som helst) och betrakta nedanstående påståenden:

$$a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a^2 \equiv b^2 \pmod{n}$$

$$a^2 \equiv b^2 \pmod{n} \Rightarrow a \equiv b \pmod{n}$$

Ett av dessa påståenden är sant för alla heltal $a, b, n > 1$ medan ett av dem inte är sant för alla heltal $a, b, n > 1$ (det är alltså falskt för några a, b, n). Bevisa det sanna påståendet och finn exempel på heltal $a, b, n > 1$ som visar att det falska påståendet verkligen är falskt.

7. Grafteori. Betrakta nedanstående graf:



Här är x är ett tal och uppgiften kommer att gå ut på att studera grafen för olika värden på x .

Finn funktionen $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{Z}$ där

$f(x) =$ antal minsta uppspannande träd i grafen ovan.

8. Kombinatorik. Betrakta ett kombinationslås som låses upp med en fyrsiffrig kod där inga siffror förekommer två gånger, till exempel: 0123, 9573, 0934 och liknande. (Däremot är inte 1125 eller 8575 ok eftersom siffror förekommer två gånger i dessa koder.) Hur många sådana fyrsiffriga koder finns det som säkert innehåller siffrorna 1 och 9?