

1. Logik. De logiska konnektiven $\wedge$, $\vee$ och $\neg$ hänger ihop med logiska grindar i digitaltekniken. Vi har ju och-grindar, eller-grindar och inverteringsgrindar. Ett annat logiskt konnektiv som kallas *Pierce pil* som skrivs med $\downarrow$ definieras som

$$p \downarrow q \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$$

som kan sägas motsvara en NOR-grind ("Not-OR"). Konnektiv kan ibland skrivas om med andra konnektiv och definitionen ovan anger hur Pierce pil skrivs om med negation och konjunktion. DeMorgans lagar kan sägas ange hur konjunktion kan skrivas om med negation och disjunktion respektive hur konjunktion kan skrivas om med negation och disjunktion enligt

$$p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \quad p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q).$$

Pierce pil har den säregna egenskapen att vi kan skriva om en utsaga som innehåller olika konnektiv till en ny ekvivalent utsaga som *bara* innehåller Pierce pil, alltså inga konjunktioner, inga disjunktioner, inga negationer, bara Pierce pil(ar) och förstås parenteser. Skriv om följande utsaga genom att bara använda Pierce pilar och parenteser:

$$(p \vee q) \rightarrow p$$

Ledning: Börja med att skriva om de grundläggande utsagorna $p \wedge q$, $p \vee q$ och $\neg p$ med endast Pierce pilar och parenteser. Till exempel har vi $\neg p \Leftrightarrow \neg(p \vee p) \Leftrightarrow p \downarrow p$. När du vet hur du skriver om dessa grundläggande utsagor så kan du använda det på den stora utsagan ovan. Parenteser är förstås acceptabla och faktiskt kommer det blir *ganska många* parenteser i svaret.

Lösning: Vi har

$$\begin{aligned} (p \vee q) \rightarrow p &\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee p \Leftrightarrow (p \downarrow q) \vee p \Leftrightarrow \neg(\neg((p \downarrow q) \vee p)) \Leftrightarrow \\ &\neg((p \downarrow q) \downarrow p) \Leftrightarrow (((p \downarrow q) \downarrow p) \downarrow ((p \downarrow q) \downarrow p)) \end{aligned}$$

2. Mängdlära. Låt A, B, C, D beteckna godtyckliga mängder. Visa, utan att använda Venndiagram att likheten

$$(A \cup B) - (C \cup D) = ((A - C) - D) \cup ((B - C) - D)$$

alltid gäller. Om du använder sanningsstabeller för att visa detta, var mycket noggrann med att ange vilka utsagor du studerar och blanda INTE ihop utsagor och mängder.

Lösning: Om vi sätter $E = C \cup D$ kan vi skriva

$$(A \cup B) - (C \cup D) = (A \cup B) - E = (A \cup B) \cap E^c$$

som enligt distributiva lagen för mängder kan skrivas

$$(A \cap E^c) \cup (B \cap E^c) = (A \cap (C \cup D)^c) \cup (B \cap (C \cup D)^c) =$$

som enligt DeMorgans lag är

$$(A \cap C^c \cap D^c) \cup (B \cap C^c \cap D^c) = ((A - C) \cap D^c) \cup ((B - C) \cap D^c) = ((A - C) - D) \cup ((B - C) - D)$$

vilket fullbordar beviset.

3. Funktioner. Låt mängden $A = \{1, 2, 3, 4\}$ vara given och definiera funktionen $f : A \rightarrow A$ genom

$$f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}.$$

Visa att funktionerna f , $f \circ f$ och $f \circ f \circ f$ är inverterbara och har

$$f^{-1} = f \circ f \circ f, \quad (f \circ f)^{-1} = f \circ f, \quad \text{och} \quad (f \circ f \circ f)^{-1} = f.$$

Lösning: Vi studerar funktionen $f \circ f \circ f \circ f$ och konstaterar att $f(f(f(f(1)))) = f(f(f(2))) = f(f(3)) = f(4) = 1$ så att

$$(f \circ f \circ f \circ f)(1) = 1.$$

På samma sätt kan vi också se att

$$(f \circ f \circ f \circ f)(2) = 2, \quad (f \circ f \circ f \circ f)(3) = 3, \quad (f \circ f \circ f \circ f)(4) = 4$$

det vill säga $(f \circ f \circ f \circ f)(x) = x$ för alla x . Detta betyder att $f \circ f \circ f \circ f = \iota$ vilket kan skrivas

$$f \circ (f \circ f \circ f) = \iota \quad \text{eller} \quad (f \circ f) \circ (f \circ f) = \iota \quad \text{eller} \quad (f \circ f \circ f) \circ f = \iota$$

vilket betyder precis att funktionerna f , $f \circ f$ och $f \circ f \circ f$ är inverterbara och har

$$f^{-1} = f \circ f \circ f, \quad (f \circ f)^{-1} = f \circ f, \quad \text{och} \quad (f \circ f \circ f)^{-1} = f.$$

4. Inledande talteori. Visa att det inte finns några heltal x, y som uppfyller $3x^2 + 2 = y^2$.

Ledning: Antag att det finns en sådan lösning. Då gäller tre fall: $y \equiv 0 \pmod{3}$, $y \equiv 1 \pmod{3}$, eller $y \equiv 2 \pmod{3}$. Visa att samtliga dessa fall leder till en motsägelse.

Lösning: Vi antar att det finns heltal x, y med $3x^2 + 2 = y^2$. Då har vi $y \equiv 0 \pmod{3}$, $y \equiv 1 \pmod{3}$, eller $y \equiv 2 \pmod{3}$. För alla dessa fall har vi $y^2 \equiv 2 \pmod{3}$ (eftersom $3x^2 \equiv 0 \pmod{3}$).

Men: $y \equiv 0 \Rightarrow y^2 \equiv 0 \Rightarrow 2 \equiv 0 \pmod{3}$ vilket är en motsägelse. Vidare har vi $y \equiv 1 \Rightarrow y^2 \equiv 1 \Rightarrow 2 \equiv 1 \pmod{3}$ vilket återigen är en motsägelse. Slutligen gäller även att $y \equiv 2 \Rightarrow y^2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod{3}$ som leder till en motsägelse på samma sätt som föregående fall.

5. Relationer. Låt $A = \{1, 2, 4, 8, \dots\} = \{2^k : k = 0, 1, 2, 3, \dots\}$ och definiera relationen $\mathcal{R}$ på A genom

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y = 4^n, \text{ för något } n \in \mathbb{Z}, n \geq 0.$$

Visa att denna relation inte är reflexiv eller symmetrisk men att den är antisymmetrisk och transitiv.

Ledning: Antisymmetri och transitivitet definieras i termer av en implikation (tex transitivitet: $x\mathbb{R}y \wedge y\mathbb{R}z \Rightarrow x\mathbb{R}z$) och en implikation är sann om förledet är falskt. Det går att visa att implikationernas förled i definitionerna för antisymmetri och transitivitet aldrig kan bli uppfyllda. Därmed blir implikationerna sanna och det blir då ett sätt att visa antisymmetri respektive transitivitet. (Glöm bara inte att visa att relationen inte är reflexiv eller symmetrisk.) Ett annat alternativ är att det också går att lista ut precis vilka tal i A som är relaterade till varandra.

Lösning: Vi undersöker vad som gäller om $x\mathbb{R}y$. Då har vi $x = 2^{k_1}$ och $y = 2^{k_2}$ så vi får

$$x - y = 2^{k_1} - 2^{k_2} = 4^n$$

för något heltal $n \geq 0$. Men vad innebär detta? Helt klart gäller $k_1 > k_2$ (eftersom $2^{k_1} - 2^{k_2} > 0$) om vi skriver $4^n = 2^{2n}$ så kan vi skriva

$$x\mathbb{R}y \Leftrightarrow 2^{k_1-k_2} - 1 = 2^{2n-k_2}$$

men eftersom $k_1 > k_2$ så är $2^{k_1-k_2} - 1$ ett *udda* tal som samtidigt är lika med 2^{2n-k_2} . Men det enda sättet för 2^{2n-k_2} att vara udda är om det är lika med 1, det vill säga vi får

$$2^{2n-k_2} = 1 \Leftrightarrow 2n - k_2 = 0 \Leftrightarrow k_2 = 2n.$$

Återigen, att $2^{2n-k_2} = 1$ ger $2^{k_1-k_2} - 1 = 2^{2n-k_2} = 1 \Rightarrow 2^{k_1-k_2} = 2 \Rightarrow k_1 - k_2 = 1 \Rightarrow k_1 = k_2 + 1$ och sammanfattningsvis har vi alltså

$$x = 2^{k_1} = 2^{2n+1} \quad \text{respektive} \quad y = 2^{k_2} = 2^{2n}$$

så de enda tal i A som kan vara relaterade till varandra är två på varandra följande tal, där det minsta (y) är en jämn potens av 2. Omvänt om vi sätter in $k_1 = 2n + 1$ och $k_2 = 2n$ har vi

$$x - y = 2^{2n+1} - 2^{2n} = 2 \cdot 2^{2n} - 2^{2n} = 2^{2n} = 4^n \Rightarrow x\mathbb{R}y$$

så att vi alltså visat att $x\mathbb{R}y \Leftrightarrow \exists n \geq 0 : x = 2^{2n+1} \wedge y = 2^{2n}$. Av detta ser vi att

1. $x\mathbb{R}y \Rightarrow x > y \Rightarrow x \neq y$ så att vi aldrig har $x\mathbb{R}x$ så relationen är inte reflexiv.
2. $x\mathbb{R}y \Rightarrow x > y$ vilket ger att om $x\mathbb{R}y$ så kan vi inte ha $y\mathbb{R}x$, dvs relationen är inte symmetrisk.
3. Av ovanstående följer också att $x\mathbb{R}y \wedge y\mathbb{R}x$ aldrig kan vara sant, det vill säga förledet i implikationen $x\mathbb{R}y \wedge y\mathbb{R}x \Rightarrow x = y$ är alltid falskt, vilket faktiskt gör att själva implikationen alltid blir sann vilket innebär att relationen är antisymmetrisk eftersom detta gäller för alla x, y .
4. Implikationen som definierar transitivitet lyder $x\mathbb{R}y \wedge y\mathbb{R}z \Rightarrow x\mathbb{R}z$ men om x, y, z ska uppfylla $x\mathbb{R}y \wedge y\mathbb{R}z$, vad betyder detta för y ? Enligt ovanstående utredning har vi:
 1. $x\mathbb{R}y \Rightarrow y$ är en *jämn* potens av 2.
 2. $y\mathbb{R}z \Rightarrow y$ är en *udda* potens av 2.

Det är en motsägelse vilket betyder att konjunktionen $x\mathbb{R}y \wedge y\mathbb{R}z$ alltid blir falsk och därför blir *förledet* i implikationen som definierar transitivitet *falskt* vilket ger att *hela implikationen blir sann* för alla x, y, z och därmed blir relationen transitiv.

6. Fördjupad talteori. Låt $a \neq 1$ vara ett godtyckligt reellt tal. Formeln för geometrisk summa lyder då

$$\sum_{k=1}^n a^k = a \cdot \frac{1 - a^n}{1 - a}.$$

Bevisa denna med matematisk induktion över heltallet $n \geq 1$.

Ledning: Talet $a \neq 1$ är alltså en konstant och behöver följa med i beräkningarna, det är n som varierar.

Lösning: Vi ansätter som vanligt $A(n)$ lika med predikatet $VL_n = HL_n$ där $VL_n = \sum_{k=1}^n a^k$ och $HL_n = a \cdot \frac{1-a^n}{1-a}$ och vi ska alltså visa

$$\forall n \geq 1 : A(n).$$

Vi tar de tre stegen i induktionen:

Steg 1. Vi ska fastställa att $A(1)$ är sann, det vill säga kontrollera att $VL_1 = HL_1$. Vi kontrollerar VL_1 och HL_1 :

$$VL_1 = \sum_{k=1}^1 a^k = a \quad HL_1 = a \cdot \frac{1 - a^1}{1 - a} = a \cdot \frac{1 - a}{1 - a} = a \cdot 1 = a$$

eftersom $VL_1 = HL_1$ gäller tydligen $A(1)$.

Steg 2. Nu ska vi visa att implikationen $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ gäller för godtyckliga $p \geq 1$, det vill säga vi ska visa att

$$VL_p = \sum_{k=1}^p a^k = a \cdot \frac{1 - a^p}{1 - a} = HL_p \Rightarrow VL_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} a^k = a \cdot \frac{1 - a^{p+1}}{1 - a} = HL_{p+1}$$

Vi gör därför induktionsantagandet $VL_p = HL_p$ ($p \geq 1$) och betraktar VL_{p+1} :

$$VL_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} a^k = \sum_{k=1}^p a^k + a^{p+1} = a \cdot \frac{1 - a^p}{1 - a} + a^{p+1}$$

där vi i sista likheten använt induktionsantagandet. Detta blir nu lika med

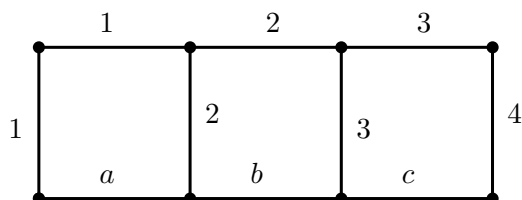
$$a \cdot \frac{1 - a^p}{1 - a} + a^{p+1} = a \cdot \frac{1 - a^p}{1 - a} + a \cdot a^p = a \cdot \left(\frac{1 - a^p}{1 - a} + a^p \frac{1 - a}{1 - a} \right) =$$

$$\frac{a}{1 - a} (1 - a^p + a^p \cdot (1 - a)) = \frac{a}{1 - a} \cdot (1 - a^p + a^p - a^{p+1}) = a \cdot \frac{1 - a^{p+1}}{1 - a}$$

men det sista uttrycket är precis HL_{p+1} varför vi visat att $VL_p = HL_p \Rightarrow VL_{p+1} = HL_{p+1}$, det vill säga implikationen $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ gäller. Steg 2 är klart.

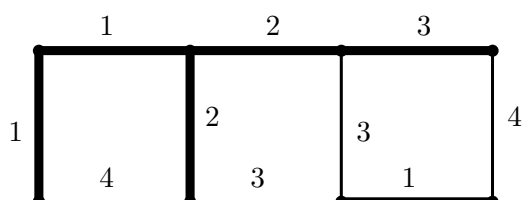
Steg 3. Steg 1 och steg 2 och induktionsaxiomet fullbordar beviset.

7. Grafteori. Betrakta nedanstående graf:



Antag att vikterna $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Finns det en uppsättning av värden på vikterna sådana att grafen ovan har två olika minsta uppspännande träd som samtidigt uppfyller $a > b > c$? I så fall ange dessa värden, de två minsta uppspännande träden och deras vikt.

Lösning: Genom att testa oss fram kan vi ta fram följande graf:



där det minsta uppspännande träd innehåller de kanter som är tjockare. Här är alltså $a = 4$, $b = 3$ och $c = 1$. Detta är inte ännu ett uppspännande träd men det kan bli ett minsta uppspännande träd på två olika sätt och det är att någondera av de två kvarvarande kanterna (som inte är tjocka) med vikten 3 läggs till. Den totala vikten av dessa två olika minsta uppspännande träd blir då

$$1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 1 = 13.$$

8. Kombinatorik. Visa att

$$|\{(x_1, x_2, x_3) : 4x_1 + 4x_2 + 11x_3 = 27, x_1 \geq 0, x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \geq 0, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \geq 0, x_3 \in \mathbb{Z}\}| = 5.$$

Ledning: Problemställningen involverar alltså att se hur många uppsättningar av icke-negativa (≥ 0) heltal som uppfyller $4x_1 + 4x_2 + 11x_3 = 27$. Det går att testa sig fram på ett systematiskt sätt här.

Lösning: Eftersom alla x_1, x_2, x_3 är icke-negativa har vi $4x_1 \leq 27$, $4x_2 \leq 27$, $11x_3 \leq 27$, den sista olikheten ger $0 \leq x_3 \leq 2$, det vill säga tre fall: $x_3 = 0$, $x_3 = 1$, $x_3 = 2$. Om vi sätter in $x_3 = 0$ så får vi $4 \cdot (x_1 + x_2) = 27$, men 27 är inte delbart med 4 så inga lösningar uppkommer från det här fallet. Om vi sätter in $x_3 = 2$ får vi $4(x_1 + x_2) = 5$ men även här uppkommer inga lösningar eftersom 5 inte är delbart med 4. Men om vi sätter in $x_3 = 1$ får vi $4(x_1 + x_2) = 16 \Leftrightarrow$

$$x_1 + x_2 = 4$$

som, om vi kräver $x_1 \geq 0$ och $x_2 \geq 0$ har lösningarna $(x_1, x_2) = (0, 4)$, $(x_1, x_2) = (1, 3)$, $(x_1, x_2) = (2, 2)$, $(x_1, x_2) = (3, 1)$ respektive $(x_1, x_2) = (4, 0)$. Alltså gäller

$$\begin{aligned} \{(x_1, x_2, x_3) : 4x_1 + 4x_2 + 11x_3 = 27, x_1 \geq 0, x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \geq 0, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \geq 0, x_3 \in \mathbb{Z}\} = \\ \{(0, 4, 1), (1, 3, 1), (2, 2, 1), (3, 1, 1), (4, 0, 1)\} \end{aligned}$$

varför

$$|\{(x_1, x_2, x_3) : 4x_1 + 4x_2 + 11x_3 = 27, x_1 \geq 0, x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \geq 0, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \geq 0, x_3 \in \mathbb{Z}\}| = 5$$

vilket skulle visas. (Denna uppgift kan anses höra till området eftersom falluppdelningen $x_3 = 0, 1, 2$ kan sägas vara en tillämpning av additionsprincipen.)

9. Sannolikhetslära. Antag att A, B, C är tre händelser som uppfyller

1. $P(A) = P(B) = P(C)$,
2. $P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(C \cap A)$,
3. Någon av A, B, C inträffar alltid,
4. Alla kan inte inträffa samtidigt.

Antag vidare att det alltid är dubbelt så sannolikt att precis en av händelserna inträffar som att precis två av dem gör det.

Beräkna $P(A)$ och $P(A \cap B)$.

Lösning: Vi ansätter $P(A) = x$ och $P(A \cap B) = y$. Eftersom inte alla tre händelser kan inträffa samtidigt innebär det att sannolikheten att precis två av dem inträffar kan tecknas som

$$P((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A))$$

som eftersom dessa händelser är disjunkta kan detta skrivas som

$$P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(C \cap A) = 3y.$$

Sannolikheten att precis en av A, B, C inträffar kan skrivas som

$$\begin{aligned} P(A - (B \cup C)) + P(B - (A \cup C)) + P(C - (A \cup B)) = \\ P(A - A \cap (B \cup C)) + P(B - B \cap (A \cup C)) + P(C - C \cap (A \cup B)) \end{aligned}$$

som kan skrivas

$$P(A) - P(A \cap (B \cup C)) + P(B) - P(B \cap (A \cup C)) + P(C) - P(C \cap (A \cup B)) =$$

$$P(A) + P(B) + P(C) - P((A \cap B) \cup (A \cap C)) - P((B \cap A) \cup (B \cap C)) - P((C \cap A) \cup (C \cap B))$$

som återigen för att vi har disjunkta händelser kan skrivas

$$\begin{aligned} P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap A) - P(B \cap C) - P(C \cap A) - P(C \cap B) = \\ x + x + x - y - y - y - y - y - y = 3x - 6y. \end{aligned}$$

Att det är precis dubbelt så sannolikt att precis en av händelserna inträffar som att precis två av dem gör det ger oss alltså ekvationen

$$3x - 6y = 2 \cdot 3y \Leftrightarrow x - 2y = 2y \Leftrightarrow x = 4y.$$

Vi har alltså

$$P(A) = P(B) = P(C) = 4P(A \cap B) = 4P(B \cap C) = 4P(C \cap A).$$

Att inte alla tre kan inträffa samtidigt ger $P(A \cap B \cap C) = 0$ och principen för inklusion och exklusion samt att någon av A, B, C säkert inträffar ger oss

$$1 = P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$$

som när vi tar hänsyn till allt vi uttryckt ovan kan skrivas som

$$1 = x + x + x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x + 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{9}{4}x$$

det vill säga vi får $x = P(A) = 4/9$ som slutligen ger

$$P(A) = x = \frac{4}{9} \quad \text{respektive} \quad P(A \cap B) = y = x/4 = \frac{1}{9}.$$

10. För högre betyg. (Kan även täcka område 4, Inledande talteori) Finn alla heltal x som uppfyller systemet av kongruenser

$$\begin{cases} 5x \equiv 2 \pmod{7} \\ 7x \equiv 2 \pmod{5} \end{cases}$$

Ledning: Med "system" menas att båda kongruenserna ska vara uppfyllda. (Precis som ekvationssystem.)

Lösning: Euklides utvidgade algoritm ger

$$7 = 1 \cdot 5 + 2, \quad 5 = 1 \cdot 3 + 2, \quad 3 = 1 \cdot 2 + 1, \quad 1 = 3 - 1 \cdot 2 = 3 - (5 - 1 \cdot 3) = 2 \cdot 3 - 5 = 3 \cdot (7 - 1 \cdot 5) - 5$$

så att $1 = 3 \cdot 7 - 4 \cdot 5$ som i ett svep ger

$$3 \cdot 7 \equiv 1 \pmod{5} \quad \text{och} \quad -4 \cdot 5 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 3 \cdot 5 \equiv 1 \pmod{7}.$$

Vi får alltså ut båda de multiplikativa inverserna till 5 modulo 7 respektive 7 modulo 5 och båda råkar vara 3. Vi har alltså

$$\begin{cases} 5x \equiv 2 \pmod{7} \\ 7x \equiv 2 \pmod{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot 5x \equiv 3 \cdot 2 \pmod{7} \\ 3 \cdot 7x \equiv 3 \cdot 2 \pmod{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 6 \pmod{7} \\ x \equiv 6 \pmod{5} \end{cases}$$

så systemet är alltså ekvivalent med

$$7|x - 6 \wedge 5|x - 6$$

och eftersom 5 och 7 är relativt prima blir detta ekvivalent med $5 \cdot 7|x - 6 \Leftrightarrow x \equiv 6 \pmod{35}$.