



TENTAMEN I DISKRET MATEMATIK, CM1000:TEN1 – JANUARI 2023

Tillåtna hjälpmedel är ett A4-ark med egna anteckningar från kursen. Anteckningar får finnas på båda sidor av arket, men det måste vara precis ett A4 ark och anteckningarna måste vara *handskrivna*. Ingen form av miniräknare är tillåten och i allmänhet gäller KTHs regler för examination. I synnerhet *måste* alltid skrivningsvaktens instruktioner lydas. Om inget annat anges i uppgifterna krävs alltid tydliga, fullständiga och korrekta motiveringar.

All behandling av uppgifter ska ske under skrivtiden, annars rättas inte lösningarna.

1. Logik. De logiska konnektiven $\wedge$, $\vee$ och $\neg$ hänger ihop med logiska grindar i digitaltekniken. Vi har ju och-grindar, eller-grindar och inverteringsgrindar. Ett annat logiskt konnektiv som kallas *Pierce pil* som skrivs med $\downarrow$ definieras som

$$p \downarrow q \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$$

som kan sägas motsvara en NOR-grind ("Not-OR"). Konnektiv kan ibland skrivas om med andra konnektiv och definitionen ovan anger hur Pierce pil skrivs om med negation och konjunktion. DeMorgans lagar kan sägas ange hur konjunktion kan skrivas om med negation och disjunktion respektive hur konjunktion kan skrivas om med negation och disjunktion enligt

$$p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \quad p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q).$$

Pierce pil har den säregna egenskapen att vi kan skriva om en utsaga som innehåller olika konnektiv till en ny ekvivalent utsaga som *bara* innehåller Pierce pil, alltså inga konjunktioner, inga disjunktioner, inga negationer, bara Pierce pil(ar) och förstås parenteser. Skriv om följande utsaga genom att bara använda Pierce pilar och parenteser:

$$(p \vee q) \rightarrow p$$

Ledning: Börja med att skriva om de grundläggande utsagorna $p \wedge q$, $p \vee q$ och $\neg p$ med endast Pierce pilar och parenteser. Till exempel har vi $\neg p \Leftrightarrow \neg(p \vee p) \Leftrightarrow p \downarrow p$. När du vet hur du skriver om dessa grundläggande utsagor så kan du använda det på den stora utsagan ovan. Parenteser är förstås acceptabla och faktiskt kommer det blir *ganska många* parenteser i svaret.

2. Mängdlära. Låt A, B, C, D beteckna godtyckliga mängder. Visa, utan att använda Venndiagram att likheten

$$(A \cup B) - (C \cup D) = ((A - C) - D) \cup ((B - C) - D)$$

alltid gäller. Om du använder sanningstabeller för att visa detta, var mycket noggrann med att ange vilka utsagor du studerar och blanda INTE ihop utsagor och mängder.

3. Funktioner. Låt mängden $A = \{1, 2, 3, 4\}$ vara given och definiera funktionen $f : A \rightarrow A$ genom

$$f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}.$$

Visa att funktionerna f , $f \circ f$ och $f \circ f \circ f$ är inverterbara och har

$$f^{-1} = f \circ f \circ f, \quad (f \circ f)^{-1} = f \circ f, \quad \text{och} \quad (f \circ f \circ f)^{-1} = f.$$

4. Inledande talteori. Visa att det inte finns några heltal x, y som uppfyller $3x^2 + 2 = y^2$.

Ledning: Antag att det finns en sådan lösning. Då gäller tre fall: $y \equiv 0 \pmod{3}$, $y \equiv 1 \pmod{3}$, eller $y \equiv 2 \pmod{3}$. Visa att samtliga dessa fall leder till en motsägelse.

5. Relationer. Låt $A = \{1, 2, 4, 8, \dots\} = \{2^k : k = 0, 1, 2, 3, \dots\}$ och definiera relationen $\mathcal{R}$ på A genom

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y = 4^n, \text{ för något } n \in \mathbb{Z}, n \geq 0.$$

Visa att denna relation inte är reflexiv eller symmetrisk men att den är antisymmetrisk och transitiv.

Ledning: Antisymmetri och transitivitet definieras i termer av en implikation (tex transitivitet: $x\mathbb{R}y \wedge y\mathbb{R}z \Rightarrow x\mathbb{R}z$) och en implikation är sann om förledet är falskt. Det går att visa att implikationernas förled i definitionerna för antisymmetri och transitivitet aldrig kan bli uppfyllda. Därmed blir implikationerna sanna och det blir då ett sätt att visa antisymmetri respektive transitivitet. (Glöm bara inte att visa att relationen inte är reflexiv eller symmetrisk.) Ett annat alternativ är att det också går att lista ut precis vilka tal i A som är relaterade till varandra.

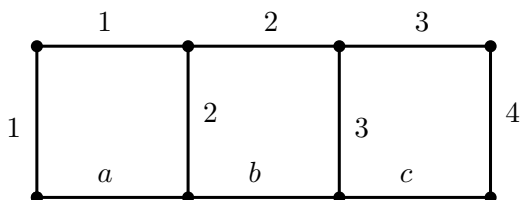
6. Fördjupad talteori. Låt $a \neq 1$ vara ett godtyckligt reellt tal. Formeln för geometrisk summa lyder då

$$\sum_{k=1}^n a^k = a \cdot \frac{1 - a^n}{1 - a}.$$

Bevisa denna med matematisk induktion över heltalet $n \geq 1$.

Ledning: Talet $a \neq 1$ är alltså en konstant och behöver följa med i beräkningarna, det är n som varierar.

7. Grafteori. Betrakta nedanstående graf:



Antag att vikterna $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Finns det en uppsättning av värden på vikterna sådana att grafen ovan har två olika minsta uppspännande träd som samtidigt uppfyller $a > b > c$? I så fall ange dessa värden, de två minsta uppspännande träden och deras vikt.

8. Kombinatorik. Visa att

$$|\{(x_1, x_2, x_3) : 4x_1 + 4x_2 + 11x_3 = 27, x_1 \geq 0, x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \geq 0, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \geq 0, x_3 \in \mathbb{Z}\}| = 5.$$

Ledning: Problemställningen involverar alltså att se hur många uppsättningar av icke-negativa (≥ 0) heltal som uppfyller $4x_1 + 4x_2 + 11x_3 = 27$. Det går att testa sig fram på ett systematiskt sätt här.

9. Sannolikhetslära. Antag att A, B, C är tre händelser som uppfyller

1. $P(A) = P(B) = P(C)$,
2. $P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(C \cap A)$,
3. någon av A, B, C inträffar alltid,
4. alla kan inte inträffa samtidigt.

Antag vidare att det alltid är dubbelt så sannolikt att precis en av händelserna inträffar som att precis två av dem gör det.

Beräkna $P(A)$ och $P(A \cap B)$.

10. För högre betyg. (Kan även täcka område 4, Inledande talteori) Finn alla heltal x som uppfyller systemet av kongruenser

$$\begin{cases} 5x \equiv 2 \pmod{7} \\ 7x \equiv 2 \pmod{5} \end{cases}$$

Ledning: Med "system" menas att båda kongruenserna ska vara uppfyllda. (Precis som ekvationssystem.)