

1. Logik. Visa att nedanstående härledning är korrekt genom att ange de slutledningsregler som steg för steg använder premisserna för att dra den slutsats som anges. Sanningstabell får inte användas i denna uppgift.

1. $p \rightarrow q$
 2. $q \rightarrow (r \vee \neg w)$
 3. $r \rightarrow \neg p$
 4. $p \rightarrow w$
-
- $\therefore \neg p$

Lösning:

5. p Antagande för indirekt härledning.
6. q 5, 1, *Modus Ponens* (och 5).
7. $r \vee \neg w$ 6, 2, *Modus Ponens* (och 5).
8. $\neg r$ 5, 3, *Modus Tollens* (och 5).
9. $\neg w$ 7, 8, *Disjunktiv Syllogism* (och 5).
10. $\neg p$ 9, 4, *Modus Tollens* (och 5).
11. $\perp$ 5, 10 (och 5).
12. $\neg p$ 5-11 och indirekt härledning.

2a. Mängdlära. (Högst en av 2a och 2b får lösas och det räcker med en korrekt lösning på en av dem för godkänt på område 2. Mängdlära. Lämna INTE in lösningar på båda!) Antag att mängderna E, F bildas genom

$$E = \{1, 2, 3, 4\} \quad F = \{a, b, c, d\}$$

och antag att mängden $U = E \times F$ uppfattas som universum. Låt vidare $A \subset E$ respektive $B \subset F$ med $|B| = 2$. Antag också att

$$(1, c), (2, d) \in A \times B^c \quad \text{och} \quad (3, c), (4, d) \in A^c \times B^c.$$

Vad är $A \times B$? Fullständig motivering krävs.

Lösning:

$$(1, c), (2, d) \in A \times B^c \quad \text{och} \quad (3, c), (4, d) \in A^c \times B^c$$

ger $1, 2 \in A$, $3, 4 \in A^c$, respektive $c, d \in B^c$. Eftersom vi också har $A \subset E$ (eftersom $E \times F$ är universum) får vi att $A = \{1, 2\}$. Vidare gäller som sagt $c, d \in B^c$ och eftersom $B \subset F$ och återigen $E \times F$ är universum så blir enda möjligheten att $B^c = \{c, d\}$ eftersom vi också ska ha $|B| = 2$ som ger $B = \{a, b\}$. Sammantaget blir

$$A \times B = \{1, 2\} \times \{a, b\} = \{(1, a), (2, a), (1, b), (2, b)\}.$$

2b. Mängdlära. (Högst en av 2a och 2b får lösas och det räcker med en korrekt lösning på en av dem för godkänt på område 2. Mängdlära. Lämna INTE in lösningar på båda!) Precis som vi kan bilda följder av tal kan vi bilda följder av mängder genom att räkna upp dem. Med

$$A_1, A_2, A_3, \dots$$

menar vi då en följd av mängder som vi också kan beteckna med $(A_n)_{n=1}^\infty$. Låt nu $(A_n)_{n=1}^\infty$, $(B_n)_{n=1}^\infty$ och $(C_n)_{n=1}^\infty$ vara tre följder av mängder som uppfyller följande:

1. $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$, (alternativt $\forall n : A_n \subset A_{n+1}$),
2. $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots$, (alternativt $\forall n : B_n \supset B_{n+1}$)
3. $C_n = A_n - B_n$.

Visa att

$$C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset \dots$$

genom att visa att $C_n \subset C_{n+1}$ för alla n .

Lösning: Vi ska alltså visa $C_n \subset C_{n+1}$ för alla n . Enligt definitionen av C_n är detta ekvivalent med

$$A_n - B_n \subset A_{n+1} - B_{n+1} \Leftrightarrow A_n \cap B_n^c \subset A_{n+1} \cap B_{n+1}^c.$$

Eftersom $B_n \supset B_{n+1}$ så gäller $B_n^c \subset B_{n+1}^c$, detta tillsammans med $A_n \subset A_{n+1}$ ger oss just $A_n \cap B_n^c \subset A_{n+1} \cap B_{n+1}^c$ vilket som ovan observerats är ekvivalent med det som skulle visas.

3a. Funktioner. (Högst en av 3a och 3b får lösas och det räcker med en korrekt lösning på en av dem för godkänt på område 3. Funktioner. Lämna INTE in lösningar på båda!) Betrakta funktionen $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ given av

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{om } x \text{ är jämnt} \\ x - 1, & \text{om } x \text{ är udda} \end{cases}.$$

Avgör vilka egenskaper denna funktion har av *injektivitet*, *surjektivitet* och *bijektivitet*. Fullständiga motiveringar krävs.

Ledning: Börja med att visa att om $f(x_1) = f(x_2)$ så måste antingen både x_1 och x_2 vara udda eller så måste båda vara jämna.

Lösning: Vi börjar med att undersöka om funktionen är *injektiv* och vi antar därför att $f(x_1) = f(x_2)$. Om x_1 och x_2 har olika paritet (dvs den ena jämn och den andra udda) så kan vi anta att x_1 är jämn och x_2 är udda. (Ett exakt analogt resonemang gäller om vi låter x_1 och x_2 byta roller.) Då gäller

$$f(x_1) = x_1 + 1 = x_2 - 1 = f(x_2) \Rightarrow x_2 = x_1 + 2$$

vilket alltså betyder att summan av två jämna tal (x_1 och 2) blir udda (x_2), det är en motsägelse. Antagandet om att x_1 och x_2 hade olika paritet kan alltså inte stämma, båda måste alltså vara udda eller så måste båda vara jämna för att $f(x_1) = f(x_2)$ ska kunna gälla. Om till exempel båda är jämna har vi

$$f(x_1) = x_1 + 1 = x_2 + 1 = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Ett exakt analogt resonemang gäller då båda är udda. Eftersom vi tydligen har $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ är f alltså *injektiv*.

Vi går vidare och visar att f även är *surjektiv* och antar därför att $y \in \mathbb{Z}$ är ett godtyckligt heltal. Vi ska nu hitta ett $x \in \mathbb{Z}$ sådant att $f(x) = y$. Om y är udda så kan vi skriva $y = 2k + 1$ för ett heltal k . Talet $2k$ är jämnt varför $f(2k) = 2k + 1 = y$ och detta visar att $x = 2k$ ger $y = f(x)$. På motsvarande sätt, om y är jämnt så kan vi skriva $y = 2k$. Talet $2k + 1$ är då ett udda tal som uppfyller $f(2k + 1) = 2k + 1 - 1 = y$ som återigen visar att det finns ett $x = 2k + 1$ som har $y = f(x)$. Eftersom y var godtyckligt valt så har vi visat att f är *surjektiv*. Eftersom f är både *injektiv* och *surjektiv* så blir även f *bijektiv* eftersom "bijektiv" betyder just att en funktion är både *injektiv* och *surjektiv*.

3b. Funktioner. (Högst en av 3a och 3b får lösas och det räcker med en korrekt lösning på en av dem för godkänt på område 3. Funktioner. Lämna INTE in lösningar på båda!) Vi betraktar funktioner $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ och $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ givna av

$$f(x) = 3 - x \quad \text{och} \quad g(x) = f(x) + f^{-1}(x).$$

Funktionen f är alltså inverterbar. Avgör om funktionen g är inverterbar eller inte. Bevisa ditt påstående.

Lösning: Vi räknar ut vad funktionen $g(x)$ verkligen blir uttryckt i x . Inversen till f ges av

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = 3 - x \Leftrightarrow x = 3 - y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

men detta är samma uttryck så f är faktiskt sin egen invers. Det betyder att

$$g(x) = f(x) + f^{-1}(x) = 3 - x + 3 - x = 6 - 2x.$$

Vi har alltså denna funktion som har $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ och vi frågar är denna funktion inverterbar? En funktion är inverterbar om och endast om den är *bijektiv* vilket till exempel kräver att den är *surjektiv*. Men g är *inte* *surjektiv* eftersom g antar heltal men alla dessa heltal är *jämna* (eftersom $g(x) = 2 \cdot (3 - x)$). Vi har till exempel aldrig något x för vilket $g(x) = 1$. Funktionen g är alltså *inte* *surjektiv*, därmed *inte* *bijektiv*, därmed *inte* inverterbar.

4. Inledande talteori. Använd Euklides utvidgade algoritm för att finna den multiplikativa inversen av 14 modulo 17 och använd den inversen för att finna alla heltal x som uppfyller $14x \equiv 3 \pmod{17}$. Alla svar ska anges reducerade modulo 17.

Lösning: Divisionsalgoritmen ger

$$17 = 1 \cdot 14 + 3, \quad 14 = 4 \cdot 3 + 2, \quad 3 = 2 + 1, \quad 1 = 3 - 2 = 3 - (14 - 4 \cdot 3) = 5 \cdot 3 - 1 \cdot 14.$$

Detta ger $1 = 5 \cdot (17 - 1 \cdot 14) - 1 \cdot 14 = 5 \cdot 17 - 6 \cdot 14$. Dett betyder att den multiplikativa inversen till 14 modulo 17 är -6 eller om vi så vill $17 - 6 = 11$. Det ger

$$14x \equiv 3 \pmod{17} \Leftrightarrow 11 \cdot 14x \equiv 11 \cdot 3 \pmod{17} \Leftrightarrow x \equiv 33 \pmod{17}$$

och detta reducerat modulo 17 ger svaret

$$x \equiv 16 \pmod{17}.$$

5. Relationer. Låt A, B vara två mängder med en funktion $f : A \rightarrow B$ definierad. Definiera nu relationen $\mathcal{R}$ på A genom

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

(a) Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation på A .

(b) Ange konkret hur ekvivalensklasserna till $\mathcal{R}$ ser ut om $A = B = \mathbb{Z}$ och $f(x) = x^2$. Du behöver inte motivera i detalj hur du tar fram dessa ekvivalensklasser.

Lösning: (a) Vi visar först att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation genom att visa att $\mathcal{R}$ är reflexiv, symmetrisk och transitiv. För detta antar vi att x, y, z betecknar godtyckligt valda element i A :

Reflexivitet: vi ska visa att $x\mathcal{R}x$ för alla $x \in A$. Men vi har $x\mathcal{R}x \Leftrightarrow f(x) = f(x)$ vilket självklart gäller för alla x i A . Relationen är alltså reflexiv.

Symmetri: vi ska nu visa att implikationen $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ gäller. Men det är nästan lika enkelt, vi har nämligen

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow f(y) = f(x) \Rightarrow y\mathcal{R}x$$

vilket fullbordar beviset av symmetri.

Transitivitet: På samma enkla sätt som ovan visar implikationen

$$f(x) = f(y) \wedge f(y) = f(z) \Rightarrow f(x) = f(z)$$

att relationen är transitiv.

(b) Vi ska nu ta fram ekvivalensklasserna då $f(x) = x^2$ och vi observerar att en ekvivalensklass beskrivs, för ett godtyckligt $x \in \mathbb{Z}$ av

$$\bar{x} = \{y \in \mathbb{Z} : f(x) = f(y)\} = \{y \in \mathbb{Z} : x^2 = y^2\}$$

men $x^2 = y^2 \Leftrightarrow |x| = |y|$, det vill säga ekvivalensklasser består av alla tal i $\mathbb{Z}$ med samma absolutbelopp som x , vi har alltså

$$\bar{x} = \{x, -x\}$$

så ekvivalensklasserna hörande till $\mathcal{R}$ på $\mathbb{Z}$ med $f(x) = x^2$ blir alltså

$$\{0\}, \{-1, 1\}, \{-2, 2\}, \{-3, 3\}, \dots, \{-x, x\}, \dots$$

6. Fördjupad talteori. Visa med matematisk induktion att

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

för alla heltal $n \geq 1$.

Lösning: Vi inför predikatet $A(n) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \Leftrightarrow VL_n = HL_n$ för $n = 1, 2, 3, \dots$. Vi ska visa $\forall n \geq 1 : A(n)$ och vi etablerar att $A(n)$ är sann genom att se efter om likheten $VL_n = HL_n$ gäller för n . Vi tar detta i de tre stegen för matematisk induktion:

Steg 1. Kontrollera att $A(1)$ är sann. Vi har

$$VL_1 = \sum_{k=1}^1 k(k+1) = 1 \cdot (1+1) = 2 \quad \text{och} \quad HL_1 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (1+2)}{3} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 2$$

och eftersom $VL_1 = HL_1$ så måste alltså $A(1)$ vara sann.

Steg 2. Vi ska nu visa att implikationen $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ gäller för alla heltal $p \geq 1$ så vi låter $p \geq 1$ vara ett godtyckligt heltal och antar att $A(p)$ är sann, det vill säga att

$$\sum_{k=1}^p k(k+1) = \frac{p(p+1)(p+2)}{3}.$$

Detta är induktionsantagandet som vi också kan skriva som $VL_p = HL_p$. Vi ska med kraft av detta komma fram till att även $A(p+1)$ gäller, det vill säga att $VL_{p+1} = HL_{p+1}$ är sann. Vi studerar därför VL_{p+1} :

$$VL_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} k(k+1) = \sum_{k=1}^p k(k+1) + (p+1)(p+1+1) = VL_p + (p+1)(p+2).$$

Vi använder här induktionsantagandet och ersätter VL_p med HL_p , det ger oss

$$VL_{p+1} = HL_p + (p+1)(p+2) = \frac{p(p+1)(p+2)}{3} + \frac{3 \cdot (p+1)(p+2)}{3}$$

som kan skrivas på ett gemensamt bråkstreck som

$$\frac{p(p+1)(p+2) + 3 \cdot (p+1)(p+2)}{3} = \frac{(p+3)(p+1)(p+2)}{3} = \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{3}.$$

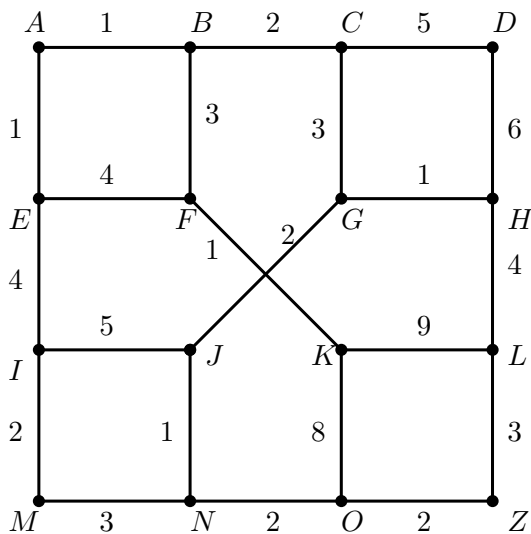
Om vi nu tecknar HL_{p+1} så blir det

$$HL_{p+1} = \frac{(p+1)(p+1+1)(p+1+2)}{3} = \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{3}$$

som alltså överensstämmer med VL_{p+1} . Alltså har vi att $A(p+1)$ gäller som en följd av $A(p)$, implikationen $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ är alltså sann vilket fullbordar steg 2 i induktionsbeviset.

Steg 3. Steg 1 och steg 2 och induktionsaxiomet fullbordar beviset.

7. Grafteori. Finn i nedanstående viktade graf ett minsta uppspännande träd. Redovisa varje delsteg i den algoritm du använder. Ange även trädets vikt.



Lösning: Vi väljer kanter av liten vikt och bygger successivt upp ett minsta uppspännande träd. Kanterna i storleksordning är

Vikt 1: AB, AE, GH, FK, JN

Vikt 2: BC, JG, IM, NO, OZ

Vikt 3: BF, CG, LZ, MN

Vikt 4: EF, EI, HL

Vikt 5: CD, IJ

Vikt 6: DH

Vikt 8: OK

Vikt 9: KL

Vi adderar kanter av successivt ökande vikt och undviker att få cykler. I första steget kan samtliga kanter av vikt 1 adderas utan att en cykel uppstår. Det ger kanterna

$$AB, AE, GH, FK, JN.$$

Vi kan av samma skäl även addera alla kanter av vikt 2 utan att några cykler uppkommer, det ger kanterna

$$AB, AE, GH, FK, JN, BC, JG, IM, NO, OZ.$$

Samma sak gäller faktiskt även för kanter av vikt 3, alla kan adderas utan att någon cykel uppkommer. Det ger kanterna

$$AB, AE, GH, FK, JN, BC, JG, IM, NO, OZ, BF, CG, LZ, MN.$$

Detta är 14 kanter. Det finns totalt 16 hörn som ska förbindas i ett minsta uppspännande träd och det är bara ett hörn kvar alltså (eftersom 15 kanter i ett sammanhängande träd ger 16 förbundna hörn). Det hörn som är kvar är D varför vi adderar den kan av minst vikt som förbinder D med någon av de redan förbundna hörnen, det blir kanten CD . Här kan vi alltså inte välja någon enda kan av vikten 4. Det slutliga minsta uppspännande trädet blir alltså

$$AB, AE, GH, FK, JN, BC, JG, IM, NO, OZ, BF, CG, LZ, MN, CD$$

som har vikten

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3 + 5 = 32.$$

8. Kombinatorik. På hur många olika sätt kan fyra *olika* sexsidiga tärningar kastas så att utfallet blir en så kallad *stege*, det vill säga något av utfallen

$$1, 2, 3, 4, \quad 2, 3, 4, 5 \quad 3, 4, 5, 6.$$

(Om tärningarnas färger till exempel är blå, gul, röd och grön så betraktar vi det som två *olika* utfall om blåa ger 1, gula ger 2, röda ger 3 och gröna ger 4 respektive gula ger 1, blåa ger 2, röda ger 3 och gröna ger 4.)

Lösning: Om vi räknar antal sätt att få 1,2,3,4 så måste det av symmetriskäl överensstämma med antal sätt att få 2,3,4,5 respektive 3,4,5,6, vi ska få precis olika utfall på alla tärningarna men två av utfallen ska inte vara med, alltså 5,6 i första fallet, 1,6 i andra fallet och 1,2 i tredje fallet. Det betyder att det sökta antalet sätt är lika med 3 gånger antalet sätt att få 1,2,3,4. Detta antalet sätt blir i sin tur antalet sätt att omordna talen 1,2,3,4 som enligt multiplikationsregeln är lika med $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$ eftersom vi räknar med att tärningarna är olika. Totalt antal sätt att få stege som beskrivits ovan blir alltså

$$3 \cdot 24 = 72.$$

9. Sannolikhetslära. Låt en urna med 2 vita kulor och 3 svarta vara given. Vi betraktar då slumpprocessen som består i att slumpmässigt ta två kulor utan återläggning ur urnan. Vi inför då också två händelser:

A: De två tagna kulorna har olika färg. (Dvs det blev en svart och en vit kula.)

B: De två tagna kulorna har samma färg. (Dvs det blev två svarta eller två vita kulor.)

Beräkna $P(A)$ och $P(B)$.

Lösning: Vi observerar att *A* och *B* är komplementärhändelser så vi har alltså

$$P(A) + P(B) = 1 \quad \text{och} \quad A \cap B = \emptyset.$$

Vi kan alltså beräkna $P(A)$ som $1 - P(B)$. Vi beräknar därför först $P(B)$. Detta är ett urvalsproblem så vi inför

n = totala antalet sätt att välja två kulor från urnan utan restriktioner.

m = antalet sätt att välja kulor så att *B* inträffar, det vill säga kulorna har samma färg.

Vi kommer då ha $P(B) = m/n$.

Talet n blir antalet sätt att välja 2 från 5 möjliga, det vill säga

$$n = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10.$$

Talet m är antalet sätt att välja kulor så att vi får två vita, eller två svarta. Dessa delhändelser är förstånds disjunkta så vi kan beräkna

$$m = \text{antalet sätt att välja två vita} + \text{antalet sätt att välja två svarta} = v + s.$$

Eftersom vi bara har två vita kulor blir $v = 1$. Eftersom vi har 3 svarta blir s lika med antalet sätt att välja 2 från 3 vilket är $\binom{3}{2} = 3$. Sammantaget får vi

$$m = v + s = 1 + 3 = 4$$

vilket ger $P(B) = \frac{4}{10} = 2/5 (= 40\%)$ och $P(A) = 1 - P(B) = 3/5 (= 60\%)$.