



KONTROLLSKRIVNING 4

Tillåtna hjälpmedel är ett A4-ark med egna anteckningar från kursen. Anteckningar får finnas på båda sidor av arket, men det måste vara precis ett A4 ark och anteckningarna måste vara *handskrivna*. Ingen form av miniräknare är tillåten och i allmänhet gäller KTHs regler för examination. I synnerhet *måste* alltid skrivningsvakternas instruktioner lydask. Om inget annat anges i uppgifterna krävs alltid tydliga, fullständiga och korrekta motiveringar.

Skrivtiden är 3 timmar och 45 minuter med start 15.15. Observera att all behandling av uppgifter ska ske under denna tid, annars rättas inte lösningarna. (Några har förlängd skrivtid och de har en annan sluttid.)

1. Logik. Visa att nedanstående härledning är korrekt genom att ange de slutledningsregler som steg för steg använder premisserna för att dra den slutsats som anges. Sanningstabell får inte användas i denna uppgift.

1. $p \rightarrow q$
 2. $q \rightarrow (r \vee \neg w)$
 3. $r \rightarrow \neg p$
 4. $p \rightarrow w$
-
- $\therefore \neg p$

2a. Mängdlära. (Högst en av 2a och 2b får lösas och det räcker med en korrekt lösning på en av dem för godkänt på område 2. Mängdlära. Lämna INTE in lösningar på båda!) Antag att mängderna E, F bildas genom

$$E = \{1, 2, 3, 4\} \quad F = \{a, b, c, d\}$$

och antag att mängden $U = E \times F$ uppfattas som universum. Låt vidare $A \subset E$ respektive $B \subset F$ med $|B| = 2$. Antag också att

$$(1, c), (2, d) \in A \times B^c \quad \text{och} \quad (3, c), (4, d) \in A^c \times B^c.$$

Vad är $A \times B$? Fullständig motivering krävs.

2b. Mängdlära. (Högst en av 2a och 2b får lösas och det räcker med en korrekt lösning på en av dem för godkänt på område 2. Mängdlära. Lämna INTE in lösningar på båda!) Precis som vi kan bilda följder av tal kan vi bilda följder av mängder genom att räkna upp dem. Med

$$A_1, A_2, A_3, \dots$$

menar vi då en följd av mängder som vi också kan beteckna med $(A_n)_{n=1}^\infty$. Låt nu $(A_n)_{n=1}^\infty$, $(B_n)_{n=1}^\infty$ och $(C_n)_{n=1}^\infty$ vara tre följder av mängder som uppfyller följande:

1. $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$, (alternativt $\forall n : A_n \subset A_{n+1}$),
2. $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots$, (alternativt $\forall n : B_n \supset B_{n+1}$)
3. $C_n = A_n - B_n$.

Visa att

$$C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset \dots$$

genom att visa att $C_n \subset C_{n+1}$ för alla n .

3a. Funktioner. (Högst en av 3a och 3b får lösas och det räcker med en korrekt lösning på en av dem för godkänt på område 3. Funktioner. Lämna INTE in lösningar på båda!) Betrakta funktionen $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ given av

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{om } x \text{ är jämnt} \\ x - 1, & \text{om } x \text{ är udda} \end{cases}.$$

Avgör vilka egenskaper denna funktion har av *injektivitet*, *surjektivitet* och *bijektivitet*. Fullständiga motiveringar krävs. (Ledning på nästa sida.)

Ledning: Börja med att visa att om $f(x_1) = f(x_2)$ så måste antingen både x_1 och x_2 vara udda eller så måste båda vara jämna.

3b. Funktioner. (Högst en av 3a och 3b får lösas och det räcker med en korrekt lösning på en av dem för godkänt på område 3. Funktioner. Lämna INTE in lösningar på båda!) Vi betraktar funktioner $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ och $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ givna av

$$f(x) = 3 - x \quad \text{och} \quad g(x) = f(x) + f^{-1}(x).$$

Funktionen f är alltså inverterbar. Avgör om funktionen g är inverterbar eller inte. Bevisa ditt påstående.

4. Inledande talteori. Använd Euklides utvidgade algoritm för att finna den multiplikativa inversen av 14 modulo 17 och använd den inversen för att finna alla heltal x som uppfyller $14x \equiv 3 \pmod{17}$. Alla svar ska anges reducerade modulo 17.

5. Relationer. Låt A, B vara två mängder med en funktion $f : A \rightarrow B$ definierad. Definiera nu relationen $\mathcal{R}$ på A genom

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

(a) Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation på A .

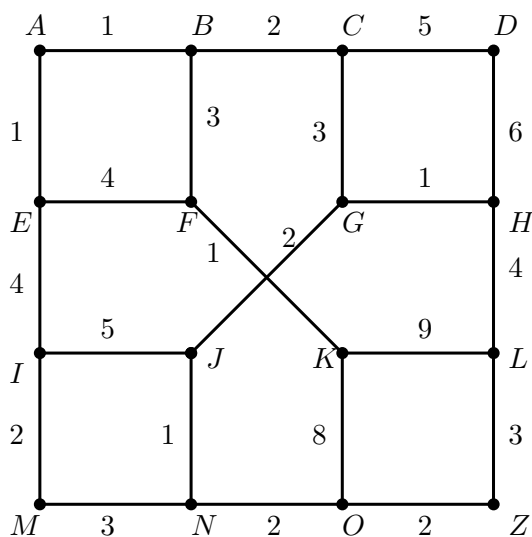
(b) Ange konkret hur ekvivalensklasserna till $\mathcal{R}$ ser ut om $A = B = \mathbb{Z}$ och $f(x) = x^2$. Du behöver inte motivera i detalj hur du tar fram dessa ekvivalensklasser.

6. Fördjupad talteori. Visa med matematisk induktion att

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

för alla heltal $n \geq 1$.

7. Grafteori. Finn i nedanstående viktade graf ett minsta uppspännande träd. Redovisa varje delsteg i den algoritm du använder. Ange även trädets vikt.



8. Kombinatorik. På hur många olika sätt kan fyra *olika* sexsidiga tärningar kastas så att utfallet blir en så kallad *stege*, det vill säga något av utfallen

$$1, 2, 3, 4, \quad 2, 3, 4, 5 \quad 3, 4, 5, 6.$$

(Om tärningarnas färger till exempel är blå, gul, röd och grön så betraktar vi det som två *olika* utfall om blåa ger 1, gula ger 2, röda ger 3 och gröna ger 4 respektive gula ger 1, blåa ger 2, röda ger 3 och gröna ger 4.)

9. Sannolikhetslära. Låt en urna med 2 vita kulor och 3 svarta vara given. Vi betraktar då slumpprocessen som består i att slumpmässigt ta två kulor utan återläggning ur urnan. Vi inför då också två händelser:

A: De två tagna kulorna har olika färg. (Dvs det blev en svart och en vit kula.)

B: De två tagna kulorna har samma färg. (Dvs det blev två svarta eller två vita kulor.)

Beräkna $P(A)$ och $P(B)$.