

3. Funktioner. Låt funktionerna $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara givna av

$$f(x) = x^2 + 2a \quad \text{respektive} \quad g(x) = 2x + 1$$

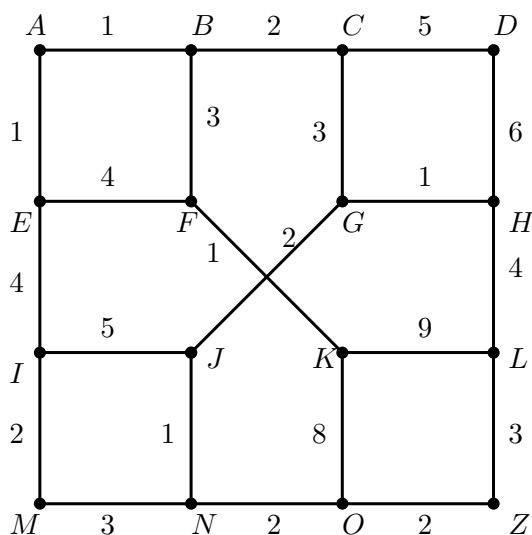
där a är ett okänt reellt tal. Bestäm ett värde på a som gör så att ekvationen $f(g(x)) = g(f(x))$ har *exakt* en lösning.

Lösning: Vi studerar ekvationen $f(g(x)) = g(f(x))$, den får utseendet

$$\begin{aligned} (g(x))^2 + 2a &= 2(f(x)) + 1 \Leftrightarrow (2x + 1)^2 + 2a = 2(x^2 + 2a) + 1 \Leftrightarrow \\ 4x^2 + 4x + 1 + 2a &= 2x^2 + 4a + 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x = 2a \Leftrightarrow x^2 + 2x = a \Leftrightarrow \\ (x + 1)^2 &= a + 1. \end{aligned}$$

Ekvationer på formen $t^2 = q$ har endast lösningar då talet $q \geq 0$. Det finns två lösningar då $q > 0$ och precis en lösning (dubbelroten $t = 0$) då $q = 0$. Så eftersom den ekvation vi landat i efter våra utredningar är av denna form så måste $q = a + 1 = 0$ vilket ger värdet $a = -1$.

7. Grafteori. Finn i nedanstående viktade graf en kortaste väg mellan hörnen A och Z genom att använda Dijkstras algoritm. Driv algoritmen så långt att alla hörn få etiketter och redovisa i varje delsteg samtliga kandidatetiketter och ange även den slutliga kostnaden på vägen du funnit.



Lösning: Dijkstras algoritm tillämpad på grafen ger nedanstående utfall. I varje steg räknas kandidatetiketterna upp och de valda etiketterna markeras i **fet kursiv stil**.

Steg 0.: ***A(0,-)***

Steg 1.: ***B(A,1), E(A,1)***

Steg 2.: ***C(B,3), F(B,4), I(E,5)***

Steg 3.: ***D(C,8), I(E,5), F(B,4), G(C,6)***

Steg 4.: ***I(E,5), K(F,5), G(C,6), D(C,8)***

Steg 5.: ***M(I,7), J(I,10), O(K,13), L(K,14), G(C,6), D(C,8)***

Steg 6.: ***M(I,7), J(G,8), O(K,13), L(K,14), H(G,7), D(C,8)***

Steg 7.: ***N(M,10), J(G,8), O(K,13), L(H,11), D(C,8)***

Steg 8.: ***N(J,9), O(K,13), L(H,11)***

Steg 9.: ***O(N,11), L(H,11)***

Steg 10.: ***Z(O,13)***

Läsning baklänges i etiketterna ger kortaste vägen från A till Z given av

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow G \rightarrow J \rightarrow N \rightarrow O \rightarrow Z$$

och den har vikten som läses på Z s etikett, nämligen 13.

8. Kombinatorik. Antag att det finns en samling människor bestående av 5 män och 4 kvinnor. På hur många olika sätt kan vi välja en styrelse av 5 personer från denna samling personer där antalet kvinnor är större än antalet män?

Lösning: Om styrelsen ska bestå av 5 personer med fler antal kvinnor än män så kan detta uppnås genom att välja 3 kvinnor och 2 män eller 4 kvinnor och 1 man. Det går inte att välja 5 kvinnor (och inga män)

eftersom det inte finns mer än totalt 4 kvinnor att välja på. Antalet styrelser blir förstås lika med antalet sätt att sätta samman dessa lag och antalet sätt att sätta samman ett lag bestående av ett antal kvinnor + ett antal män är lika med antalet sätt att först välja kvinnorna och sedan männen. Slumpprocesser i två steg alltså som kan räknas ut med multiplikationsprincipen. Enligt multiplikationsprincipen blir antalet sätt att välja en styrelse med 3 kvinnor lika med

$$\binom{4}{3} \cdot \binom{5}{2} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 4 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 4 \cdot 10 = 40$$

där alltså $\binom{4}{3}(=4)$ är antalet sätt att välja 3 kvinnor från 4 möjliga och $\binom{5}{2}(=10)$ är antalet sätt att välja 2 män från 5 möjliga. På liknande sätt blir antalet sätt att välja en styrelse med 4 kvinnor och 1 man lika med

$$\binom{4}{4} \cdot \binom{5}{1} = 1 \cdot 5 = 5$$

där, på samma sätt, $\binom{4}{4}(=1)$ är antalet sätt att välja 4 kvinnor från 4 möjliga (finns bara ett sätt: vi väljer alla!) och $\binom{5}{1}(=5)$ är antalet sätt att välja 1 man från 5 möjliga. Det totala antalet sätt, som är det sökta antalet styrelseformationer blir alltså

$$40 + 5 = 45.$$

9. Sannolikhetslära. Vi inför två händelser A, B som är oberoende och uppfyller $P(A) = 0.4$ respektive $P(B) = 0.7$. Beräkna följande storheter:

1. $P(A \cap B)$
2. $P(A \cup B)$
3. $P(A \cup B^c)$.

Lösning: Eftersom A, B är oberoende så är även A, B^c beroende och alltså gäller

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad P(A \cap B^c) = P(A) \cdot P(B^c).$$

Eftersom $P(B^c) = 1 - P(B) = 0.3$ och vi alltid har $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ så har vi

1. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.4 \cdot 0.7 = 0.28$,
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.4 - 0.28 = 0.82$,
3. $P(A \cup B^c) = P(A) + P(B^c) - P(A \cap B^c) = P(A) + (1 - P(B)) - P(A) \cdot (1 - P(B)) = 0.4 + 0.3 - 0.4 \cdot 0.3 = 0.7 - 0.12 = 0.58$.