



KONTROLLSKRIVNING 2

Tillåtna hjälpmedel är ett A4-ark med egna anteckningar från kursen. Anteckningar får finnas på båda sidor av arket, men det måste vara precis ett A4 ark och anteckningarna måste vara *handskrivna*. Ingen form av miniräknare är tillåten och i allmänhet gäller KTHs regler för examination. I synnerhet *måste* alltid skrivningsvakternas instruktioner lydas. Om inget annat anges i uppgifterna krävs alltid tydliga, fullständiga och korrekta motiveringar.

Skrivtiden är 2 timmar och 45 minuter med start 15.15. Observera att all behandling av uppgifter ska ske under denna tid, annars rättas inte lösningarna. (Några har förlängd skrivtid och de har en annan sluttid.)

2. Mängdlära. Vi definierar operationen "symmetrisk differens", $\oplus$ som $A \oplus B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$. Visa, utan att använda Venndiagram, mängdidentiteten

$$(A^c \oplus B^c)^c = (A \cup B^c) \cap (B \cup A^c).$$

Om du använder sanningstabeller krävs att du är **mycket** noggrann med att ange precis hur de utsagor du studerar är formulerade.

Lösning: Vi låter A, B beteckna två godtyckliga mängder och för att skriva mindre och minska risken för slarvfel sätter vi

$$E = A^c \quad F = B^c.$$

Vi har då

$$\begin{aligned}(A^c \oplus B^c)^c &= (E \oplus F)^c = ((E \cap F^c) \cup (F \cap E^c))^c = \\ &= (E \cap F^c)^c \cap (F \cap E^c)^c = (E^c \cup F) \cap (F^c \cup E) = \\ &= (A \cup B^c) \cap (B \cup A^c).\end{aligned}$$

3. Funktioner. Låt funktionerna $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ och $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara givna av

$$f(x) = x^2 + 9 \quad \text{respektive} \quad g(x) = x - 9.$$

Finn alla $x \in \mathbb{R}$ som uppfyller $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

Lösning: Vi ska lösa ekvationen $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ så vi skriver ut vad vänster och höger led i den är:

$$VL = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 + 9 = (x - 9)^2 + 9 = x^2 - 18x + 81 + 9 = x^2 - 18x + 90$$

$$HL = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) - 9 = x^2 + 9 - 9 = x^2.$$

Ekvationen som vi ska lösa är nu $VL = HL$ och vi får

$$VL = x^2 - 18x + 90 = x^2 = HL \Leftrightarrow -18x + 90 = 0 \Leftrightarrow x = 90/18 = 5.$$

4. Inledande talteori. Antag att a, b är två relativa prima heltal som också uppfyller $a + b = 1$. Antag vidare att $xa + yb = 1$ för några heltal x, y . Visa att $a|y - 1$ och $b|x - 1$.

Lösning: Subtraktion av $a + b = 1$ från $xa + yb = 1$ ger oss

$$xa + yb - a - b = 1 - 1 \Leftrightarrow (x - 1)a + (y - 1)b = 0 \Leftrightarrow (x - 1)a = -(y - 1)b.$$

Vi har alltså $a|(y - 1)b$ och $b|(x - 1)a$. Eftersom a, b är relativt prima ger detta $a|(y - 1)$ och $b|(x - 1)$ vilket skulle bevisas.

5. Relationer. Definiera relationen $\mathcal{R}$ på alla positiva heltal $A = \{1, 2, 3, \dots\}$ genom

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 2|y/x \vee 2|x/y.$$

Ge en fullständig utredning kring vilka egenskaper som den här relationen har av *reflexivitet*, *symmetri* och *transitivitet*. (Du ska alltså inte undersöka *antisymmetri*. Som vanligt, om relationen har en egenskap ska ett bevis för denna ges och om relationen inte har en av egenskaperna så ska exempel ges som illustrerar detta.

Ledning: När vi skriver $2|y/x$ (respektive $2|x/y$) ingår det i kravet för att denna utsaga ska vara sann att talet y/x (eller x/y) verkligen är ett heltal. Vi uppfattar alltså utsagan $2|2/3$ som *falsk* i det här fallet. Formellt sett är den utsagan meningslös, men vi ger mening till den genom att säga att den automatiskt är falsk om inte y/x (eller x/y) är heltal.

Lösning: För vilket tal x som helst gäller

$$x\mathcal{R}x \Leftrightarrow 2|x/x \vee 2|x/x \Leftrightarrow 2|1 \vee 2|1 \Leftrightarrow 2|1$$

vilket är falskt för alla x . Relationen kan alltså inte vara reflexiv och vilket x som helst duger som exempel på det (vi har alltså inte $x\mathcal{R}x$ för *något* enda x). Relationen är symmetrisk vilket vi kan se genom att konstatera att

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 2|y/x \vee 2|x/y \Leftrightarrow 2|x/y \vee 2|y/x \Leftrightarrow y\mathcal{R}x.$$

Relationen är slutligen inte transitiv, detta kan vi se genom att välja

$$x = 1 \quad y = 2 \quad z = 1$$

vi har $1\mathcal{R}2$, eftersom $2|2/1$, och $2\mathcal{R}1$, eftersom $2|2/1$, (alltså $x\mathcal{R}y$ och $y\mathcal{R}z$) men trots detta inte $1\mathcal{R}1$ (framgår av utredningen om reflexivitet), det vill säga *inte* $x\mathcal{R}z$. Relationen är alltså *inte* transitiv.

6. Fördjupad talteori. Visa med matematisk induktion att för alla heltal $n > 0$ gäller

$$\sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$$

Lösning: Vi inför predikatet $A(n) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \Leftrightarrow VL_n = HL_n$ där vi alltså har

$$VL_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} \quad \text{respektive} \quad HL_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$$

Det som vi ska visa kan nu formuleras som $\forall n \geq 1 : A(n)$. Vi tar nu de tre stegen i ett induktionsbevis.

Steg 1. Kontrollera att $VL_1 = HL_1$. Vi har

$$VL_1 = \sum_{k=1}^1 \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{2 \cdot 1 + 1}{1^2 \cdot (1+1)^2} = \frac{3}{4} \quad \text{respektive} \quad HL_1 = \frac{1 \cdot (1+2)}{(1+1)^2} = \frac{3}{4}$$

och eftersom dessa tal är lika har vi $VL_1 = HL_1$, det vill säga $A(1)$ är sann.

Steg 2. Vi ska nu visa att implikationen $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ gäller för alla $p \geq 1$ så vi antar att

$$A(p) \Leftrightarrow VL_p = \sum_{k=1}^p \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{p(p+2)}{(p+1)^2} = HL_p$$

gäller för ett godtyckligt $p \geq 1$. Vi studerar nu om $A(p+1)$ gäller, det vill säga vi undersöker utsagan $VL_{p+1} = HL_{p+1}$. Vi har

$$VL_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^p \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} + \frac{2(p+1)+1}{(p+1)^2(p+1+1)^2} = VL_p + \frac{2p+3}{(p+1)^2(p+2)^2}$$

och här använder vi induktionsantagandet $VL_p = HL_p$ så att vi kan skriva om detta till

$$HL_p + \frac{2p+3}{(p+1)^2(p+2)^2} = \frac{p(p+2)}{(p+1)^2} + \frac{2p+3}{(p+1)^2(p+2)^2}.$$

Det är ofta bra med gemensamma nämnare så vi bryter ut faktorn $(p+1)^2$ i nämnaren och få detta till

$$\frac{1}{(p+1)^2} \left(p(p+2) + \frac{2p+3}{(p+2)^2} \right) = \frac{1}{(p+1)^2} \left(p(p+2) \frac{(p+2)^2}{(p+2)^2} + \frac{2p+3}{(p+2)^2} \right) =$$

$$\frac{1}{(p+1)^2(p+2)^2} (p(p+2)^3 + 2p+3) = \frac{p(p^3 + 3 \cdot 2 \cdot p^2 + 3 \cdot 2^2 \cdot p + 2^3) + 2p+3}{(p+1)^2(p+2)^2} =$$

$$\frac{p^4 + 6p^3 + 12p^2 + 10p + 3}{(p+1)^2(p+2)^2}.$$

Vi jämför nu detta uttryck med uttrycket för HL_{p+1} :

$$HL_{p+1} = \frac{(p+1)(p+1+2)}{(p+1+1)^2} = \frac{(p+1)(p+3)}{(p+2)^2}.$$

Vi behöver en gemensam nämnare $(p+1)^2(p+2)^2$ så vi förlänger med $(p+1)^2$. Detta ger

$$HL_{p+1} = \frac{(p+1)^2}{(p+1)^2} \cdot \frac{(p+1)(p+3)}{(p+2)^2} = \frac{(p+1)^3(p+3)}{(p+1)^2(p+2)^2} = \frac{(p+1)^3(p+3)}{(p+1)^2(p+2)^2} =$$

$$\frac{(p^3 + 3p^2 + 3p + 1)(p+3)}{(p+1)^2(p+2)^2} = \frac{p^4 + 3p^3 + 3p^2 + p + 3p^3 + 9p^2 + 9p + 3}{(p+1)^2(p+2)^2} = \frac{p^4 + 6p^3 + 12p^2 + 10p + 3}{(p+1)^2(p+2)^2}.$$

Eftersom vi ser att uttrycken för VL_{p+1} och HL_{p+1} blir lika så måste tydligen A_{p+1} gälla vilket slutligen ger att implikationen $A_p \Rightarrow A_{p+1}$ måste vara sann. Detta fullbordar steg 2 i induktionsbeviset.

Steg 3. Steg 1 och 2 och induktionsaxiomet fullbordar beviset.