



KONTROLLSKRIVNING 2

Tillåtna hjälpmedel är ett A4-ark med egna anteckningar från kursen. Anteckningar får finnas på båda sidor av arket, men det måste vara precis ett A4 ark och anteckningarna måste vara *handskrivna*. Ingen form av miniräknare är tillåten och i allmänhet gäller KTHs regler för examination. I synnerhet *måste* alltid skrivningsvakternas instruktioner lydas. Om inget annat anges i uppgifterna krävs alltid tydliga, fullständiga och korrekta motiveringar.

Skrivtiden är 2 timmar och 45 minuter med start 15.15. Observera att all behandling av uppgifter ska ske under denna tid, annars rättas inte lösningarna. (Några har förlängd skrivtid och de har en annan sluttid.)

2. Mängdlära. Vi definierar operationen ”symmetrisk differens”, $\oplus$ som $A \oplus B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$. Visa, utan att använda Venndiagram, mängdidentiteten

$$(A^c \oplus B^c)^c = (A \cup B^c) \cap (B \cup A^c).$$

Om du använder en mängdteoretisk sanningstabell krävs att du är **mycket** noggrann med att ange precis hur de utsagor du studerar är formulerade.

3. Funktioner. Låt funktionerna $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara givna av

$$f(x) = x^2 + 9 \quad \text{respektive} \quad g(x) = x - 9.$$

Finn alla $x \in \mathbb{R}$ som uppfyller $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

4. Inledande talteori. Antag att a, b är två relativa prima heltal som också uppfyller $a + b = 1$. Antag vidare att $xa + yb = 1$ för några heltal x, y . Visa att $a|y - 1$ och $b|x - 1$.

5. Relationer. Definiera relationen $\mathcal{R}$ på alla positiva heltal $A = \{1, 2, 3, \dots\}$ genom

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 2|y/x \vee 2|x/y.$$

Ge en fullständig utredning kring vilka egenskaper som den här relationen har av *reflexivitet*, *symmetri* och *transitivitet*. (Du ska alltså inte undersöka *antisymmetri*. Som vanligt, om relationen har en egenskap ska ett bevis för denna ges och om relationen inte har en av egenskaperna så ska exempel ges som illustrerar detta.

Ledning: När vi skriver $2|y/x$ (respektive $2|x/y$) ingår det i kravet för att denna utsaga ska vara sann att talet y/x (eller x/y) verkligen är ett heltal. Vi uppfattar alltså utsagan $2|2/3$ som *falsk* i det här fallet. Formellt sett är den utsagan meningslös, men vi ger mening till den genom att säga att den automatiskt är falsk om inte y/x (eller x/y) är heltal.

6. Fördjupad talteori. Visa med matematisk induktion att för alla heltal $n > 0$ gäller

$$\sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$$