



KONTROLLSKRIVNING 1

Tillåtna hjälpmedel är ett A4-ark med egna anteckningar från kursen. Anteckningar får finnas på båda sidor av arket, men det måste vara precis ett A4 ark och anteckningarna måste vara *handskrivna*. Ingen form av miniräknare är tillåten och i allmänhet gäller KTHs regler för examination. I synnerhet *måste* alltid skrivningsvakternas instruktioner lydas. Om inget annat anges i uppgifterna krävs alltid tydliga, fullständiga och korrekta motiveringar.

Skrivtiden är 2 timmar och 45 minuter med start 15.15. Observera att all behandling av uppgifter ska ske under denna tid, annars rättas inte lösningarna. (Några har förlängd skrivtid och de har en annan sluttid.)

1. Logik. Studera nedanstående sex härledningar. Genom att kryssa i rutor ange, för varje härledning, om den är korrekt eller inkorrekt. För att uppgiften ska vara godkänd får du högst ha fel på *en* härledning. Inga motiveringar krävs. Saknas kryss räknas det som ett felaktigt svar.

$$\begin{array}{l} 1. \quad p \vee q \\ 2. \quad p \rightarrow q \\ \hline \therefore \quad q \end{array}$$

☐ korrekt ☐ inkorrekt.

$$\begin{array}{l} 1. \quad p \vee q \\ 2. \quad \neg p \rightarrow \neg q \\ \hline \therefore \quad q \end{array}$$

☐ korrekt ☐ inkorrekt.

$$\begin{array}{l} 1. \quad p \vee q \\ 2. \quad \neg p \rightarrow \neg q \\ \hline \therefore \quad p \end{array}$$

☐ korrekt ☐ inkorrekt.

$$\begin{array}{l} 1. \quad \neg(p \wedge q) \\ 2. \quad p \rightarrow q \\ \hline \therefore \quad \neg p \end{array}$$

☐ korrekt ☐ inkorrekt.

$$\begin{array}{l} 1. \quad \neg(p \wedge q) \\ 2. \quad \neg p \rightarrow \neg q \\ \hline \therefore \quad \neg p \end{array}$$

☐ korrekt ☐ inkorrekt.

$$\begin{array}{l} 1. \quad \neg(p \wedge q) \\ 2. \quad \neg p \rightarrow \neg q \\ \hline \therefore \quad \neg q \end{array}$$

☐ korrekt ☐ inkorrekt.

2. Mängdlära. Låt A, B, C, D beteckna fyra godtyckliga mängder. Avgör om formeln

$$(A - B) \cup (B - C) \cup (C - D) \cup (D - A) = A \cup B \cup C \cup D$$

stämmer eller inte. Om formeln stämmer, ge ett bevis för att det är så. Om inte, ange exempel på fyra mängder, A, B, C, D där vänster och höger led i formeln är olika.

3. Funktioner. Låt mängden $A = \{1, 2, 3, 4\}$ vara given och definiera funktionerna $f : A \rightarrow A$, $g : A \rightarrow A$ och $h : A \rightarrow A$ genom

$$f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\} \quad g = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 1)\} \quad h = \{(1, 3), (3, 1), (2, 2), (4, 4)\}.$$

Vi låter som vanligt ι beteckna identitetsfunktionen som har $\iota(x) = x$ för alla $x \in A$. (Vi skriver inte ι_A i denna uppgift.)

(a) Studera nedanstående uppsättningar funktioner. Ange vilka uppsättningar som endast består av *injektiva* funktioner:

$$\begin{array}{lll} \text{Uppsättning 1:} & f \circ g, & g \circ h, \quad \iota \circ h \\ \text{Uppsättning 2:} & f \circ h, & h \circ f, \quad f \circ \iota \\ \text{Uppsättning 3:} & h \circ g, & \iota \circ h, \quad h \circ f \end{array}$$

(b) Studera nedanstående uppsättningar funktioner. Ange vilka uppsättningar som endast består av *surjektiva* funktioner:

$$\begin{array}{lll} \text{Uppsättning 1:} & g \circ f, & h \circ h, \quad \iota \circ f \\ \text{Uppsättning 2:} & f \circ f, & f \circ \iota, \quad h \circ \iota \\ \text{Uppsättning 3:} & g \circ g, & \iota \circ f, \quad \iota \circ g \end{array}$$

Du får högst ha fel på *en* uppsättning totalt för båda deluppgifterna. Du behöver inte ange några motivationer i den här uppgiften, ange bara uppsättningar som du anser uppfyller kraven "alla injektiva" (för (a)) respektive "alla surjektiva" (för (b)).