Lösningar till övningar i kapitel 5

$\boxed{5.1.1}$ $E = \{1, 2\}$ $F = \{2, 3, 4\}$

$E \times F \neq F \times E$ eftersom $(1,2) \in E \times F$, men $(1,2) \notin F \times E$.

$\boxed{5.1.2}$ $A = \{2,3,4\}$, $B = \{3,4,5,6,7,8\}$

$R : A \to B$ def. genom $aRb \iff a \mid b$.

$\{b \in B : \exists a \in A, a \mid b\} = \{3,4,6,8\}$

eftersom $A \ni 3 \mid 3 \in B$, $A \ni 2 \mid 4 \in B$ och likn. för 6 & 8, men inget $a \in A$ har $a \mid 5$ eller $a \mid 7$.

Är R en funktion? Nej ty $(2,4) \in R$ & $(2,6) \in R$ och $4 \neq 6$.

$\boxed{5.1.3}$ $A = \{2,3,4\}$, $B = \{4,5,6,8,10\}$

$R : A \to B$: $aRb \iff a \mid b$

$S : A \to B$: $aSb \iff b = a + 4$

$R = \{(2,4),(2,6),(2,8),(2,10),(3,6),(4,4),(4,8)\}$

$S = \{(2,6),(4,8)\}$

$R \cup S = \{(2,4),(2,6),(2,8),(2,10),(3,6),(4,4),(4,8)\}$ $(= R)$

$R \cap S = \{(2,6),(4,8)\}$ $(= S)$

$\boxed{5.1.4}$ $A = \{a,b,c,d\}$, $R = \{(a,a),(b,c),(c,b),(d,d)\}$

- R reflexiv? Nej ty $(b,b) \notin R$.
- R symmetrisk? Ja, så fort vi har yRy så gäller även xRy detta ser vi direkt på R
- R anti-symmetrisk? Har vi $xRy \wedge yRy \Rightarrow x=y$ för alla $x,y \in A$? Nej, t.ex gäller

  $cRc \wedge cRb$ men $c \neq b$.
- R transitiv? Gäller $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ för alla $x,y,z \in A$? Nej, välj t.ex $x=b$, $y=c$, $z=b$, då gäller $bRc \wedge cRb$ men $b \not R b$ så detta håller inte för $y=b$, $y=c$ & $z=b$.

$\boxed{5.1.5}$ $<$ på $\mathbb{R}$ är inte symmetrisk eftersom t.ex $1<2$ men $2 \not< 1$. Den är anti-symmetrisk eftersom förledet implikationen $x<y \wedge y<x \Rightarrow x=y$ alltid är falskt, då blir hela implikationen alltid sann, dvs vi har $\forall x y: x<y \wedge y<x \Rightarrow x=y$ vilket precis är anti-symmetri. (forts.)

$\boxed{5.1.5}$ (forts.) $<$ på $\mathbb{R}$ är transitiv eftersom vi alltid har

$$x<y \;\wedge\; y<z \;\Rightarrow\; x<z,$$

vi behöver inte motivera detta så noggrannt eftersom vi kan anse att det är välkänt.

$\boxed{5.1.6}$ $\mathcal{U}=\{a,b,c\}$ definiera R på $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ genom $ARB \Leftrightarrow |A|=|B|$.

(a) $\{a,b\}R\{b,c\}$ gäller eftersom

$$|\{a,b\}|=2=|\{b,c\}|$$

(b) $\{b\}R\{a,c\}$ gäller inte eftersom

$$|\{b\}|=1\neq 2=|\{a,c\}|$$

(c) $\{a\}R\{c\}$ gäller eftersom

$$|\{a\}|=1=|\{c\}|$$

$\boxed{5.1.7}$ $A=\{2,5,6\}$, $B=\{5,6,7\}$

$R: A\to B:\; xRy \Leftrightarrow x\geq y$

$R=\{(5,5),(6,5),(6,6)\}$ Inte en funktion från A till B av två skäl. Det ena är att $6R5$ & $6R6$ men $5\neq 6$. Vilket är det andra skälet?

forts ↗

$\boxed{5.1.7}$ (forts.) $A = \{2,5,6\}$, $B = \{5,6,7\}$

$S : A \to B$, $xSy \Leftrightarrow 2 \mid x-y$

$S = \{(2,6), (5,5), (5,7), (6,6)\}$

Inte funktion ty $5S5 \wedge 5S7$, men $5 \neq 7$.

$T = \{(2,7), (6,6), (6,7)\}$. Inte funktion av två skäl. Det ena är att vi inte har $5Ty$ för något $y \in B$. Vilket är det andra skälet?

$\boxed{5.1.8}$ $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4,5\}$

$R : A \to B$, $aRb \Leftrightarrow a < b$

$R = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)\}$

$|R| = 9$.

$\boxed{5.1.9}$ R på $\mathbb{Z}$, $xRy \Leftrightarrow xy > 0$

Är R reflexiv? gäller $xRx \Leftrightarrow x \cdot x > 0$ för alla $x \in \mathbb{Z}$? Nej ty $0 \cdot 0 \not> 0$ så $x = 0$ motsäger reflexivitet.

forts.

$\boxed{5.1.9}$ (forts) R på $\mathbb{Z}$, $xRy \Leftrightarrow xy > 0$

Är R symmetrisk? Ja ty

$xRy \Leftrightarrow xy > 0 \Leftrightarrow yx > 0 \Leftrightarrow yRx$ $(\forall x, y)$

Är R anti-symmetrisk? Har vi

$xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$. Nej ty

$1R3 \wedge 3R1$ (eftersom $1 \cdot 3 = 3 \cdot 1 > 0$)

MEN $1 \neq 3$.

Är R transitiv? Har vi

$xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$?

$x \cdot y > 0 \wedge y \cdot z > 0$ innebär att alla $x, y, z \neq 0$ och x & y har samma tecken. Samtidigt har även y & z samma tecken — men då har även x & z samma tecken, d.v.s $x \cdot z > 0$ och alltså gäller xRz, som alltså följer av $xRy \wedge yRz$.

R är alltså transitiv.

$\boxed{5.1.10}$ $\mathcal{U} = \{a, b, c\}$, $R : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \to \mathcal{P}(\mathcal{U})$,

$ARB \Leftrightarrow A \subset B$

R är reflexiv eftersom alla mängder uppfyller $E \subset E$.

R är inte symmetrisk eftersom till exempel

$\{a\} \subset \{a, b\}$ men $\{a, b\} \not\subset \{a\}$

R är antisymmetrisk eftersom

$A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B$

R är transitiv eftersom

$A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

De senaste två egenskaperna behöver inte motiveras med mer än att vi konstaterar att de är välkända för mängder.

$\boxed{5.1.11}$ En relation som har alla fyra egenskaperna är likhetsrelationen, $=$ som ju faktiskt är en relation. T.ex. om $A = \{1,2,3\}$ så är likhetsrelationen på A lika med

$$\{(1,1),(2,2),(3,3)\}.$$

Det bör vara trivialt (alltså väldigt enkelt) att visa att likhetsrelationen har alla fyra egenskaperna. Om du inte tycker detta, ta upp detta till diskussion.

Finns det någon mer relation än $=$ som har alla fyra egenskaperna? Nej, ty antag aRb där R har alla fyra egenskaperna. Då gäller bRa pga symmetri, $aRb \wedge bRa$ ger då $a=b$ pga antisymmetri. aRa, reflexiviteten gör till sist att alla element är täckta av R.

$\boxed{5.2.1}$ $ARB \Leftrightarrow |A| = |B|$ är en ekvivalens-relation på $\mathcal{P}(U)$ eftersom

1. Reflexivitet: det är klart att $|A| = |A|$ för alla $A \in \mathcal{P}(U)$, dvs ARA $\forall A \in \mathcal{P}(U)$.

2 Symmetri:

$ARB \Leftrightarrow |A| = |B| \Leftrightarrow |B| = |A| \Leftrightarrow BRA$ $\forall A, B$

3. Transitivitet: $ARB \wedge BRC \Rightarrow$

$|A| = |B| \wedge |B| = |C| \Rightarrow |A| = |B| = |C| \Rightarrow$

ARC $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(U)$.

Relationen kan tolkas som att två mängder är relaterade om de har lika många element. Ekvivalensklasserna består då av mängder som har ett visst antal element:

Varför två {?

0 element: $\{\emptyset\}$

1 element: $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$

2 element: $\{\{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}\}$

3 element: $\{\{a,b,c\}\}$ $(= \{U\})$

$\boxed{5.2.2}$ $\sim$ på $\mathbb{R}$ definieras genom $x \sim y \Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Z}$.
Vi låter x, y, z beteckna godt. tal i $\mathbb{R}$.

1. Reflexivitet: $x \sim x \Leftrightarrow x - x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
$0 \in \mathbb{Z}$ vilket helt klart är sant. (0 ÄR ett heltal.)

2. $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y \sim x$

$$x - y = -(y - x)$$

om $x - y \in \mathbb{Z}$ så gäller även $-(x-y) =$
$y - x \in \mathbb{Z}$
så R är symmetrisk

3. Transitivitet: $x \sim y \wedge y \sim z \Leftrightarrow$
$x - y \in \mathbb{Z} \wedge y - z \in \mathbb{Z} \Rightarrow \underbrace{x-y}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{y-z}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow x - z \in \mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow x \sim z$ så transitiviten håller.

En ekvivalensklass består av alla reella tal som har exakt samma decimaler i sin decimalutveckling. Det finns dock ett problem med de reella tal vars decimalutveckling slutar i ∞ många nollor — vet du vad problemet är?

$\boxed{5.2.3}$ Vi använder ett geometriskt språkbruk och konstaterar att två linjer l_1 & l_2 givna av $\begin{cases} l_1: a_1x + b_1y = c_1 \\ l_2: a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ är parallella

om och endast om vektorerna (a_1, b_1) och (a_2, b_2) är parallella, det vill säga, det finns ett $\lambda \neq 0$ sådant att

$$(a_1, b_1) = \lambda(a_2, b_2).$$

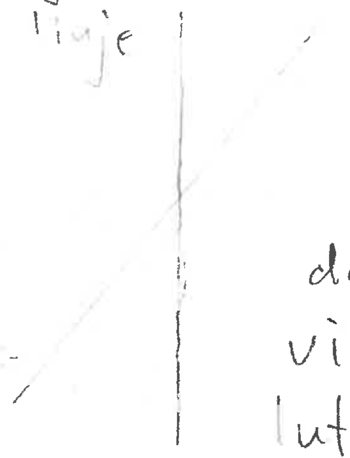
1. Reflexiviteten: Varje linje är självklart parallell med sig själv $(\lambda = 1)$

2. Symmetrin: Om $l_1 // l_2$ så finns λ så att $(a_1, b_1) = \lambda(a_2, b_2)$, men det ger $(a_2, b_2) = \frac{1}{\lambda}(a_1, b_1)$ så att även $l_2 // l_2$.

3. Transitiviteten: $l_1 // l_2 \wedge l_2 // l_3 \Rightarrow$ $(a_1, b_1) = \lambda_1(a_2, b_2) \wedge (a_2, a_2) = \lambda_2(a_3, b_3)$ $\Rightarrow (a_1, b_1) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 (a_3, b_3) \Rightarrow l_1 // l_3$

forts. ⌀

5.2.3 (forts) En ekvivalensklass består av alla linjer som är parallella med någon viss linje



Detta delar upp alla linjer i hela planet i klasser där alla linjer i en viss klass har samma lutning.

5.2.4 $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\sim$ på A:

$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc.$

Reflexivitet: Visa att $(a,b) \sim (a,b)$ — det följer av att $a \cdot b = b \cdot a$ $(c = a \,\&\, d = b)$

Symmetri: $(a,b) R (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$
$(c,d) R (a,b) \Leftrightarrow cb = da \Leftrightarrow ad = bc$ } ekvivalenta.

Transitivitet $(a,b) R (c,d) \land (c,d) R (e,f) \Leftrightarrow$

$ad = bc \land cf = de \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \land \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \Rightarrow$

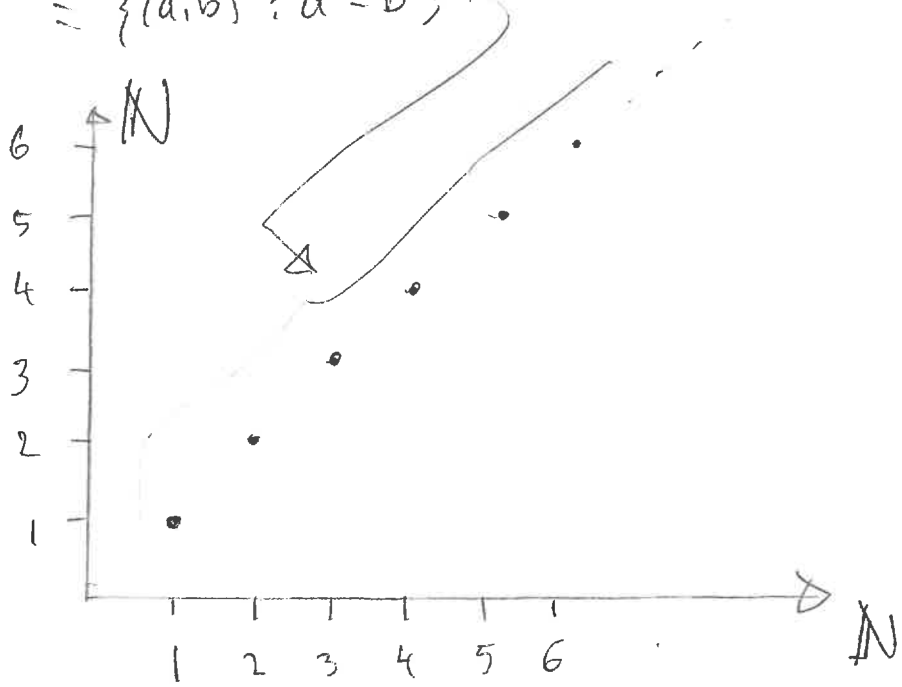
$\frac{a}{b} = \frac{e}{f} \Rightarrow af = be \Leftrightarrow (a,b) R (e,f)$

forts.

$\boxed{5.2.4}$ (forts)

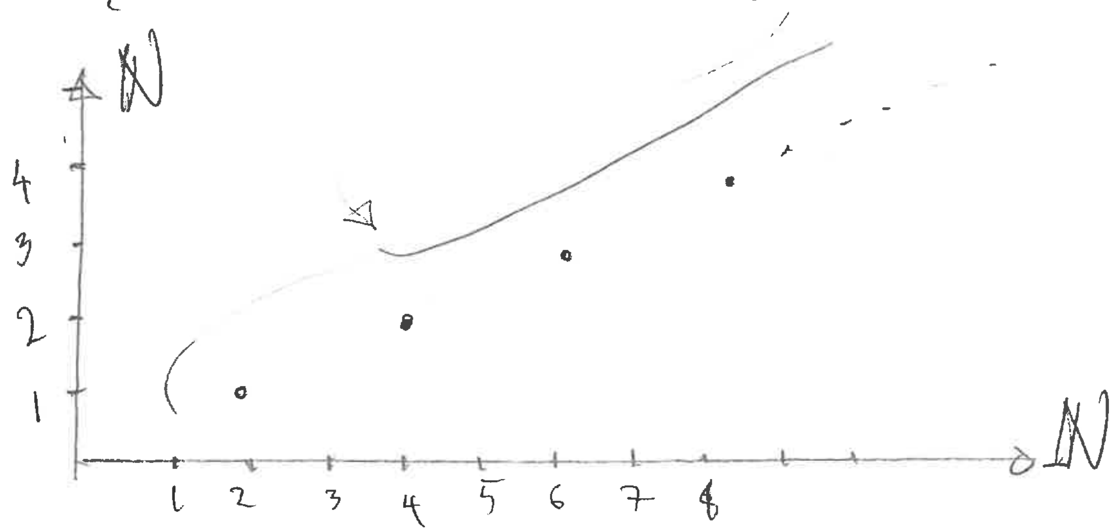
$$\overline{(1,1)} = \{(a,b) : (a,b) R (1,1)\} = \{(a,b) : a \cdot 1 = 1 \cdot b\}$$

$$= \{(a,b) : a = b\}$$



$$\overline{(2,1)} = \{(a,b) : (a,b) R (2,1)\} =$$

$$\{(a,b) : a \cdot 1 = b \cdot 2\} = \{(2k,k) : k \in \mathbb{N}\}$$



$\boxed{5.2.5}$ $\sim$ är symmetrisk och transitiv och har egenskapen

$$\forall x \in A : \exists y \in A : x \sim y.$$

Visa att $\sim$ är reflexiv.

Välj $x \in A$ godtyckligt. Då enligt egenskapen finns $y \in A$ med

$$x \sim y$$

$\Rightarrow$ $y \sim x$ pga symmetrin, så

$$x \sim y \wedge y \sim x \Rightarrow x \sim x$$

enligt transitiviteten.

Alltså gäller $x \sim x$ och eftersom x var valt godtyckligt är reflexiviteten visad.

$\boxed{5.3.1}$ Mycket av det som påstås i den här uppgiften kan uppfattas som välkänt, både $\leq$ och $\geq$ är reflexiva, symmetriska och transitiva — de är alltså partiella ordningsrelationer.

Alla tal uppyller också $x \leq y$ eller $y \leq x$ vilket visar att $\leq$ är total. Samma sak gäller för $\geq$.

$\boxed{5.3.2}$ A = alla positiva heltal. Relationen $|$ på A är

1. Reflexiv eftersom $a|a$ för alla $a \in A$,
2. antisymmetrisk eftersom om $a|b$ & $b|a$ så finns k_1 & k_2 sådana att

$$b = k_1 a \quad \wedge \quad a = k_2 b \Rightarrow$$

$$b = k_1 k_2 b \Rightarrow 1 = k_1 k_2 \Rightarrow k_1 = k_2 = 1$$

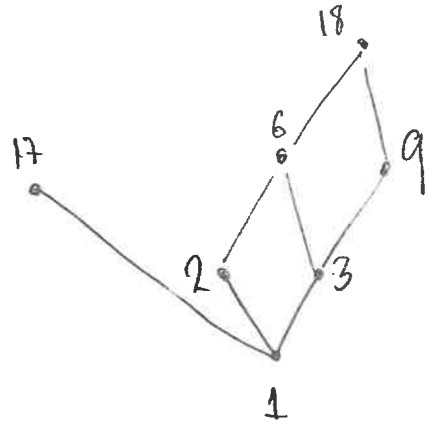
(eftersom $k_1 \geq 0$ & $k_2 \geq 0$) $\Rightarrow a = b$

3. Transitiviteten är enkel

Ordningen är <u>inte</u> total eftersom varken $3|7$ eller $7|3$, i en total ordning <u>måste</u> $a \leq b$ eller $b \leq a$ för alla element a, b.

$\boxed{5.3.3}$ Relationen i 5.1.10 är delmängds-relationen som det kan anses vara välkänt att den är reflexiv, symmetrisk och transitiv. Den blir därmed en partiell ordningsrelation. Den blir dock inte total på $\mathcal{P}(U)$, tex har vi varken $\{a\} \subset \{b\}$ eller $\{b\} \subset \{a\}$.

$\boxed{5.3.4}$ $a|b$, $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 17, 18\}$



Det minimala antalet element som vi måste ta bort för att få en total ordning är 3, antingen 17, 2, 6 eller 17, 3, 9.

$\boxed{5.3.5}$ $xRy \Leftrightarrow x+y$ jämnt är inte antisymmetrisk, ty $x = 0$ & $y = 2$ har $x+y = 2 = y+x$ = jämnt men $x \neq y$. Alltså är inte detta en ordningsrelation.

$\boxed{5.3.6}$ $x^2 \leq y^2$ på $\mathbb{R}$ är inte antisymetrisk ty med $x=-1$ och $y=+1$ har vi $(-1)^2 \leq (1)^2$ & $(1)^2 \leq (-1)^2$ dvs både $-1 R 1$ och $1 R -1$ men inte $x=y$. Alltså är denna relation inte antisymmetrisk och därmed inte en partiell ordningsrelation.

Om vi däremot inskränker definitionsmängden till $\mathbb{N}$ som bara består av positiva tal har vi

$$xRy \Leftrightarrow x^2 \leq y^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \leq \sqrt{y^2} \Leftrightarrow$$

$x \leq y$ vilket förstås är den enklaste partiella ordningsrelationen.

$\boxed{5.3.7}$ Lösning saknas