Hemtentamen, CM1000:TEN1 – Diskret matematik, april 2020

Den här tentamen är en hemtentamen som ges under april 2020 då världen och KTH är under stark inverkan av en pandemi. KTHs respons till detta är att studenter inte får vistas i KTHs lokaler och denna omtentamen ges därför som hemtentamen. En hemtentamen ges då alltså och all kurslitteratur och allt kursmaterial är tillåtna hjälpmedel. Det är dock inte tillåtet att någon annan än just du gör själva tentamen utan den ska utföras självständigt som alla andra tentor. För att verifiera att tentamen genomförts självständigt kommer ett kompletterande muntligt förhör att hållas för alla de som klarat någon uppgift hörande till något delområde, så innan du kan få meriter införda i matrisen med alla delområden måste detta kompletterande förhör hållas. Detta gäller dock bara uppgifterna 1, 3, 5 och 9 som är mer teoretiska till sin natur. De andra uppgifterna kommer inte att förhöras ytterligare men alla de andra uppgifterna kräver fullständiga motiveringar i lösningarna utom 4, 7 och 8 som är *rena* beräkningsuppgifter och ni kommer inte att avkrävas förklaringar av dessa (även om lösningarna måste vara fullständiga).

Nytt krav: referenser i motiveringarna

Eftersom det här är en hemtenta och vi ska träna den akademiska disciplinen som består i förmågan att ge fullgoda motiveringar till det vi hävdar så kommer ytterligare ett krav att införas på era lösningar. Ni ska ange kapitel- och sidhänvisningar i boken till de satser som ni använder. Det betyder att tentamen kommer att få en mer teoretisk natur än tidigare tentor och det kommer att blir en lite mer tidsödande procedur att framställa lösningarna på uppgifterna. I gengäld kommer ni att få tentamen tillgänglig några dagar innan den ska lämnas in.

Exempel på motivering:

Enligt Principen för inklusion och exklusion i kapitel 8, sidan 2 kan vi skriva

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

och i uppgiften ger det ...

Delar

Tentamen har tre delar. Den första delen – Del I – består av nio problem som svarar mot kursens nio delområden. De problem som svarar mot delområden som tidigare är avklarade från kursens kontrollskrivningar behöver inte lösas. För lägsta godkända betyg (E) måste alla nio delområden vara avklarade. Den andra delen – Del II – består av ett lite svårare problem. Om ni uppfyller kraven för betyg E och klarar problemet från Del II uppfyller ni kravet för betyg C. Den sista delen – Del III – består också av ett ytterligare lite svårare problem. Om ni uppfyller kraven för betyg C och klarar problemet från Del III uppfyller ni kraven för betyg A. Betyg B respektive D reserveras för situationer där studenter försökt på högre betyg men inte riktigt nått fram. Ingen poängsättning sker, varje lösning är antingen helt rätt eller helt fel – dock bedöms inte lösningar som har slarvfel i sig som felaktiga om slarvfelet inte ändrar den logiska strukturen på problemställningen. Om ingenting annat sägs i uppgiften krävs *fullständiga* motiveringar för alla lösningar. Lösningar som är otydliga rättas inte utan anses vara underkända. Se därför särskilt till att de filer du lämnar in har tydliga bilder i sig!

Tillgodoräknande

Om en uppgift som tillhör ett högre betyg löses korrekt och den uppgiften kan sägas *täcka* ett av de grundläggande nio delområdena, så kan lösningen av den uppgiften tillgodoräknas för det grundläggande delområde som täcks av högrebetygsuppgiften – det delområdet anses då avklarat. Det betyder att om ni misslyckas med en lösning av ett problem i Del I så kan ni ändå få det området avklarat om ni klarar av att lösa en motsvarande högrebetygsuppgift. I alla uppgifter för högre betyg anges vilken uppgift i Del I som de kan täcka. Om ni känner er osäkra på er lösning av någon uppgift i Del I kan ni alltså också ge en lösning för en högrebetygsuppgift som täcker den uppgift ni är osäkra på.

Del I

1. *Logik.* Studera nedanstående härledning.

1. $p \to q$
2. $q \to \neg p$
3. $p \vee \neg r$

$\therefore \; r$

Om härledningen är korrekt, visa hur slutledningen följer av premisserna genom att antingen ange en fullständig härledning med angivande av vilka slutledningsregler som används, eller använd sanningstabell. Om slutledningen inte är korrekt, ange en tilldelning av sanningsvärden till p, q, r som uppfyller premisserna men inte slutsatsen.

2. Låt A, B, C, D vara mängder och betrakta utsagorna

$$A \subset B \wedge C \subset D \Rightarrow A \times B \subset C \times D \qquad \textit{och} \qquad A \subset C \wedge B \subset D \Rightarrow A \times B \subset C \times D.$$

Den ena av dessa utsagor är sann och den andra är falsk.

(a) Ange vilken av dem som är sann och bevisa den.

(b) Ange vilken av dem som är falsk och ge exempel på fyra mängder A, B, C, D som illustrerar att den falska utsagan verkligen är falsk.

3. *Funktioner.* Låt mängderna $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ respektive $C = \{x, y, z\}$ vara givna. Bilda funktionen $g = \{(a, x), (b, y), (c, x), (d, z)\}$.

(a) Ange en injektiv funktion $f : A \to B$ som gör att $h = g \circ f : A \to C$ blir bijektiv.

(b) Ange en injektiv funktion $f : A \to B$ som gör att $h = g \circ f : A \to C$ *inte* blir bijektiv.

4. *Inledande talteori.* Använd Euklides utvidgade algoritm för att finna den multiplikativa inversen av 5 modulo 32 och använd den för att finna alla heltal x som uppfyller kongruensen

$$5x \equiv 21 \pmod{32}.$$

Alla tal i ditt svar ska vara reducerade modulo 32.

5. *Relationer.* Definiera relationen $\mathcal{R}$ på $\mathbb{Z}$ genom

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 + y^2 \text{ är ett udda tal eller } y < 0.$$

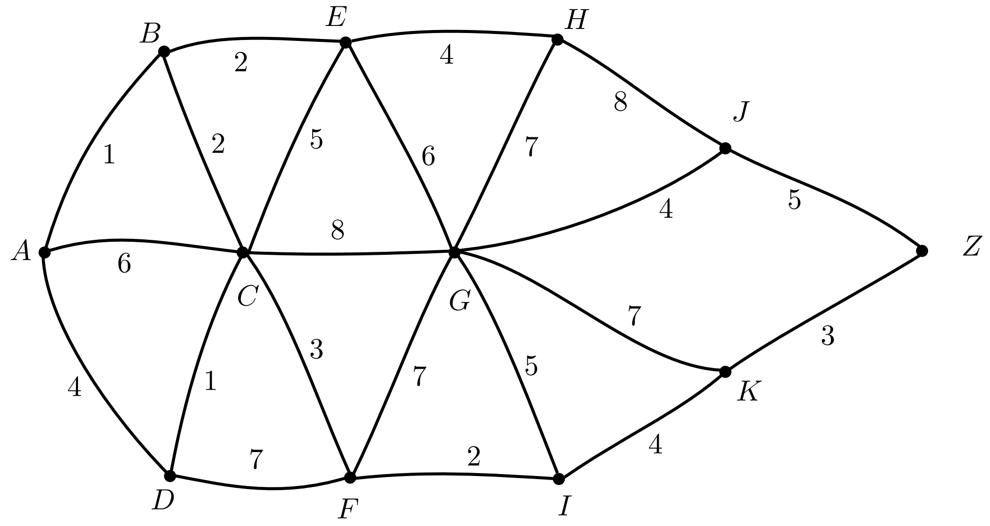
Ge en fullständig utredning av vilka egenskaper denna relation har av *reflexivitet*, *symmetri*, *antisymmetri* och *transitivitet*. Alltså, för dessa fyra egenskaper: om relationen har egenskapen, bevisa det, om relationen inte har egenskapen, bevisa att den inte har egenskapen.

6. *Fördjupad talteori.* Betrakta $\mathbb{Z}_n$ för $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Ange för varje sådant $\mathbb{Z}_n$ antal element i $\mathbb{Z}_n$ som har sig själva som multiplikativ invers. Fyll i nedanstående tabell med stöd av dina utredningar och redovisa hur du tänkt.

Mängd	Antal element som har sig själva som multiplikativ invers
$\mathbb{Z}_2$	?
$\mathbb{Z}_3$	?
$\mathbb{Z}_4$	?
$\mathbb{Z}_5$	?
$\mathbb{Z}_6$	?
$\mathbb{Z}_7$	?
$\mathbb{Z}_8$	?
$\mathbb{Z}_9$	?

(Ledning: hämta inspiration från avsnittet ”Mer om multiplikativa inverser i $\mathbb{Z}_p$” i kapitel 6.

7. *Grafteori.* Betrakta nedanstående graf. Tillämpa Dijkstras algoritm och finn den kortaste vägen från A till Z. Alla hörn ska förses med etiketter och alla kandidatetiketter ska redovisas i din lösning och även kostnaden för den kortaste vägen ska anges.



8. *Kombinatorik.* Betrakta ordet

$$KOMBINATORIK.$$

på hur många olika sätt kan vi omordna bokstäverna i ordet och bilda olika ord? (Så kallade *anagram.*)

9. *Sannolikhetslära.* Studera ordet

$$SANNOLIKHETSLÄRAN$$

och antag att vi väljer två bokstäver utan återläggning ur detta ord.

(a) Vad är sannolikheten att de två bokstäverna som valts är lika? (Alltså två "S" eller två "N".)
(b) Om bokstäverna som valts är är lika, vad är sannolikheten att de båda är ett "S"?
(c) Om bokstäverna som valts är lika, vad är sannolikheten att de båda är ett "N"?

Del II

10. *Kan täcka delområde 5 – Relationer.* Låt U och V vara två disjunkta mängder och låt $\mathcal{R}$ vara en ekvivalensrelation på U och låt $\mathcal{S}$ vara en ekvivalensrelation på V. Inför relationen $\mathcal{T}$ på $U \cup V$ genom

$$x\mathcal{T}y \Leftrightarrow x\mathcal{R}y \vee x\mathcal{S}y.$$

Bevisa att $\mathcal{T}$ också är en ekvivalensrelation.

Del III

11. *Kan täcka delområde 7 – Grafteori.* Låt $G = (V, E)$ beteckna en bipartit sammanhängande graf där alla hörn har grad 2. Visa att grafen har en eulercykel som också är en hamiltoncykel.