



KONTROLLSKRIVNING 2 – CM1000, DISKRET MATEMATIK, HT2021

Tillåtna hjälpmedel är ett A4-ark med egna anteckningar från kursen. Anteckningar får finnas på båda sidor av arket. Inlämning sker i form av fotograferade handskrivna lösningar i aktuell Quiz på kurswebben. Om ni av någon anledning inte kan scanna in en fil och måste mejla den till mig, ladda istället upp en platsmarkörsfil och mejla er lösning till mig. Jag kan inte rätta uppgifter som inte har uppladdade bildfiler och observera att om ni trycker på "skicka in"/"submit" så kan inte längre lämna in några lösningar. Om ni mejlar en lösning till mig måste också detta föregås av en diskussion med mig (ansvarig lärare) på skrivningens zoommöte.

Skrivtiden är de normala 1 timme och 45 minuter + 25-30 minuter extra tid för bildhantering & uppladdning, därför tillgängliggörs skrivningen 10-15 minuter innan 14.00 och sista (ordinarie) inlämningstid är 16.00. Observera att all behandling av alla uppgifter och all hantering med inlämning ska ske under denna tid. Annars rättas inte lösningarna. (Några har förlängd skrivtid och motsvarande för dem klockslag är 17.00.) Fullständiga lösningar krävs till alla uppgifter. Observera också att uppgift 4 *inte* kan användas till underlag för muntlig tentamen.

2. Mängdlära. Betrakta nedanstående två påståenden. A, B, C betecknar godtyckliga mängder. Det ena påståendet är sant och det andra är falskt. Bevisa det som är sant och visa att det som är falskt verkligen är falskt genom att ta fram tre mängder A, B, C som uppfyller förutsättningarna men inte slutsatsen.

$$A \oplus C = \emptyset \wedge A \cap B \cap C = \emptyset \Rightarrow A \cup C = \emptyset \quad A \cap C = \emptyset \wedge B \subset A \cup C \Rightarrow B \subset A \oplus C.$$

Som vanligt får inte Venndiagram användas i ett formellt bevis, men de kan användas i privata anteckningar för att finna tre mängder A, B, C som uppfyller förutsättningarna förledet i den falska utsagan men inte slutsatsen. Symbolen \oplus betyder mängdoperationen "symmetrisk differens" som ges av $E \oplus F = (E - F) \cup (F - E)$.

4. Inledande talteori. Finn alla heltal x som uppfyller kongruensen $11x \equiv 73 \pmod{13}$. Reducera ditt svar modulo 13. (*Kan inte användas som underlag för muntlig tentamen!*)

5. Relationer. Låt mängden A vara given av alla par av reella tal (x, y) som uppfyller $x > 0$, det vill säga låt $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. Definiera relationen \mathcal{R} på A genom

$$(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2) \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}.$$

(a) Visa att \mathcal{R} är en ekvivalensrelation.

(b) Beskriv de två olika ekvivalensklasserna som innehåller $(1, 1)$ respektive $(2, 1)$. Rita en tillhörande figur som visar hur dessa ekvivalensklasser ser ut.

6. Fördjupad talteori. Använd matematisk induktion för att visa att för alla positiva heltal $n > 0$ gäller

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{n}{2n + 1}.$$