

Följande material är gjort av tidigare lärare på kursen, Armin Halilovic, och har sedan blivit redigerat.

OLIKA TILLÄMPNINGAR AV DIFFERENTIAL EKVATIONER

Följande uttryck används ofta i olika problem som leder till differentialekvationer:

Text	Formell beskrivning
A är proportionell mot B	det finns ett tal k så att $A=kB$
A är proportionell mot B och C	$A=kBC$ (för ett tal k)
A är omvänt proportionell mot B	$A=\frac{k}{B}$ (för ett tal k)
A är proportionell mot summan av B och C, differensen mellan B och C, produkten av B och C, kvoten av B och C,	$A=k(B+C)$ $A=k(B-C)$ $A=kBC$ $A=k \cdot \frac{B}{C}$ (för ett tal k)
Funktionens förändringshastighet	$y'(t)$ (eller $y'(x)$)

Exempel 1. Ställ upp en differentialekvation för funktionen $y(t)$ om

- Funktionen $y(t)$ förändras med hastigheten (som **är lika med**) $5y(t)$.
- Funktionen $y(t)$ förändras med hastigheten som är **proportionell mot** $y(t)$.
- Funktionen $y(t)$ förändras med hastigheten som är **proportionell mot** t .
- Funktionen $y(t)$ förändras med hastigheten som är **omvänt proportionell mot** $y(t)$.
- Funktionen $y(t)$ förändras med hastigheten som är **proportionell mot** differensen mellan t och $y(t)$.

Svar:

a) $y'(t) = 5y(t)$, b) $y'(t) = ky(t)$ c) $y'(t) = kt$ d) $y'(t) = \frac{k}{y(t)}$ e) $y'(t) = k(t - y(t))$

Exempel 2. Ett radioaktivt ämne sönderfaller med hastigheten som är proportionell mot den mängd av ämnet som finns kvar.

- Ställ upp en differentialekvation som beskriver förloppet.
- Av 125 gram blir det kvar 121.9 gram efter 100 år.
Hur många gram blir kvar efter 330 år.

Svar a) $\frac{dy}{dt} = ky(t)$

b) den allmänna lösningen är $y = Ce^{kt}$.

Villkoret $y(0) = 125 \Rightarrow C = 125$ och därmed $y = 125e^{kt}$

Från $y(100) = 121.9$ har vi $121.9 = 125e^{100k} \Rightarrow k = \frac{1}{100} \ln\left(\frac{121.9}{125}\right) \approx -0.000251$.

Alltså $y = 125e^{-0.000251t}$.

Härav $y(330) \approx 115.1$

Svar b) 115.1

I följande uppgift används **Newtons avsnalningslag**: Om en kropp med temperaturen T_0 placeras i en omgivning med temperaturen T_R , kommer kroppens temperaturer $y(t)$ att förändras med hastigheten som är proportionell mot skillnaden mellan föremålets temperatur och omgivnings temperatur. Med andra ord har vi följande ekvation

$$y'(t) = k(y(t) - T_R)$$

med begynnelsevillkor : $y(0) = T_0$

Exempel 3.

Ett föremål med temperaturen 200°C har efter en minut i rumstemperatur (22°C) svalnat till 140° . Hastigheten med vilken temperaturen sjunker är proportionell mot skillnaden mellan föremålets temperatur och rumstemperaturen.

- Bestäm föremålets temperatur som funktion av tiden
- Efter hur lång tid blir föremålets temperatur 30° ?

Lösning:

$$\frac{dy}{dt} = k(y(t) - 22) \Rightarrow \frac{dy}{y - 22} = k dt \Rightarrow \int \frac{dy}{y - 22} = \int k dt \Rightarrow$$

$$\ln |y - 22| = kt + C_1 \Rightarrow$$

$$y = 22 + D \cdot e^{kt}$$

$$\text{Startvillkoret } y(0) = 200 \Rightarrow D = 178 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 22 + 178 \cdot e^{kt}$$

$$\text{Villkoret } y(1) = 140 \Rightarrow 140 = 22 + 178 \cdot e^k \Rightarrow \frac{118}{178} = e^k \Rightarrow k = \ln \frac{118}{178} \approx -0.411$$

$$\text{Svar a)} y = 22 + 178 \cdot e^{kt} \approx y = 22 + 178 \cdot e^{-0.411t}$$

$$\text{b) } y(t) = 30 \Rightarrow 22 + 178 \cdot e^{kt} = 30 \Rightarrow e^{kt} = 8/178 \Rightarrow kt = \ln(8/178) \Rightarrow t = \frac{\ln(8/178)}{k}$$

$$t \approx 7.546 \text{ min}$$

$$\text{Svar b)} t \approx 7.546 \text{ min}$$

Exempel 4.

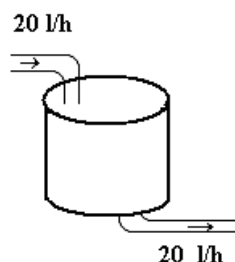
I nedanstående vattentank finns 200 liter vatten. Vid $t=0$ finns det 2500 g salt i tanken. Tanken tillförs vatten med hastigheten 20 liter per timme och saltinnehåll 4 g per liter. Efter ordentlig mixning förs vatten ut med hastigheten 20 liter per timme.

Låt $y(t)$ beteckna antalet g salt i tanken vid tiden t (d v s efter t timmar).

a) Ställ upp en differentialekvation för $y(t)$ och bestäm $y(t)$.

b) Hur mycket salt finns i tanken efter 13 timmar och 30 min.

Svara i antalet gram (avrunda till heltal gram).

**Lösning:**

a) Låt $y(t)$ beteckna antalet g salt i tanken vid tiden t

Förändringshastighet blir då $y'(t)$. Dessutom gäller $y'(t) = V_{in} - V_{ut}$

V_{in} visar hur många gram salt per timme tillförs tanken.

V_{ut} visar hur många gram salt per timme förs ut ur tanken.

$$\text{där } V_{in} = 20 \frac{\text{liter}}{\text{timme}} \cdot 4 \frac{\text{gram}}{\text{liter}} = 80 \frac{\text{gram}}{\text{timme}}$$

Vid tiden t finns det $y(t)$ gram salt i 200 liter vatten. Därför är densitet vid

$$\text{tiden } t \text{ lika med } r = \frac{y(t)}{\text{volymen}} = \frac{y(t) \text{ gram}}{200 \text{ liter}} = \frac{y(t)}{200} \frac{\text{gram}}{\text{liter}} \text{ och därmed}$$

$$V_{ut} = 20 \frac{\text{liter}}{\text{timme}} \cdot \frac{y(t)}{200} \frac{\text{gram}}{\text{liter}} = \frac{20y(t)}{200} \frac{\text{gram}}{\text{timme}}.$$

$$\text{Nu, från } y'(t) = V_{in} - V_{ut} \text{ har vi ekvationen } y'(t) = 20 \cdot 4 - 20 \cdot \frac{y(t)}{200} \Rightarrow$$

$$y'(t) + 0.1y(t) = 80. \quad (*) \quad \text{med begynnelsevillkoret: } y(0) = 2500.$$

Först homogenadeln:

Den karakteristiska ekvationen för den homogena delen: $r + 0.1 = 0 \Rightarrow$

$$r = -0.1$$

$$\text{Härav } y_H(t) = Ce^{-t/10}$$

Vi ansätter $y_p(t) = A$ och därmed $y'_p(t) = 0$.

Substitution i (*) ger

$$0.1A = 80 \Rightarrow A = 800 \text{ och därmed } y_p(t) = 800.$$

Den allmänna lösningen är $y(t) = Ce^{-t/10} + 800$

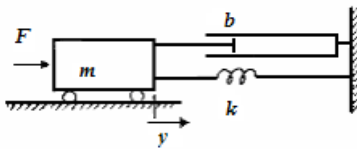
Villkoret $y(0) = 2500$ medför $C = 1700$

och $y(t) = 1700e^{-t/10} + 800$.

Svar a) $y(t) = 1700e^{-t/10} + 800$

b) $y(13.5) = y(t) = 1700e^{-1.35} + 800 \approx 1241$

Exempel 5.



Ett mekaniskt system med en fjäder och en dämpare kan beskrivas med följande ekvation, med avseende på $y(t)$

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = F(t).$$

a) Bestäm den allmänna lösningen för $y(t)$ då

$$m = 1, b = 5, k = 6, F = 5\sin(t) + 5\cos(t).$$

b) Bestäm den lösning som satisfierar $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

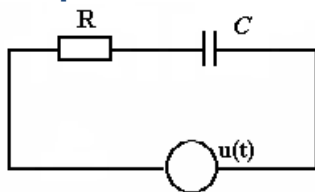
Svar a)

$$\text{Ekvationen: } y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 5\sin t + 5\cos t$$

$$\text{Lösning: } y(x) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} + \sin t$$

Svar b) $y(x) = \sin t$

Exempel 6. I den elektriska kretsen



Gäller enligt Kirchhoffs spänningslag relationen: $R \cdot i(t) + \frac{q(t)}{C} = u(t)$ där $q(t)$

betecknar kondensatorns laddning vid tiden t .

Deriverar vi denna relation och utnyttjar sambandet $i(t) = \frac{dq}{dt}$ får vi

$$\text{differentialekvationen } Ri'(t) + \frac{1}{C} \cdot \frac{dq}{dt} = u'(t) \Rightarrow i'(t) + \frac{1}{RC} \cdot i(t) = \frac{1}{R} u'(t)$$

för bestämning av strömmen $i(t)$.

Bestäm strömmen $i(t)$ om $R = 1 \Omega$, $C = \frac{1}{10} \text{ F}$, $u(t) = 24 \text{ V}$ och att

a) vid $t=0$ är strömmen 1A, dvs $i(0) = 1 \text{ A}$.

b) vid $t=0$ är laddningen 2 Coulomb, dvs $q(0) = 2$.

Lösning:**a)**

$$\begin{cases} i'(t) + \frac{1}{RC} \cdot i(t) = \frac{1}{R} u'(t) \\ u(t) = 24 \Rightarrow u' = 0 \\ R = 1 \\ C = \frac{1}{10} \\ i(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow i'(t) + 10i(t) = 0$$

Härav $i(t) = C_1 e^{-10t}$ (*) [den allmänna lösningen för $i(t)$]

För att bestämma C_1 använder vi begynnelsevillkoren $i(0) = 1$ och får $C_1 = 1$. därmed $i(t) = 1e^{-10t}$

Svar a) $i(t) = e^{-10t}$ (ampere)

b)

$$\begin{cases} R \cdot i(t) + \frac{q(t)}{C} = u(t) \\ u(t) = 24 \\ R = 1 \\ C = \frac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow i(t) + 10q(t) = 24$$

Vi använder villkoret $q(0)=2$ och den allmänna lösningen från a-delen $i(t) = C_1 e^{-10t}$.

För att bestämma $i(0)$ sätter vi $t=0$ i ekvationen och sätter in $q(0)=2$:

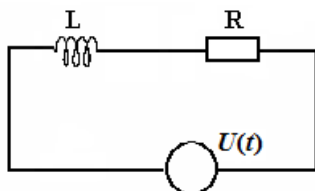
$$i(0) + \frac{1}{10} \cdot q(0) = 24 \Rightarrow i(0) = 24 - 10q(0) = 24 - 10 \cdot 2 = 4.$$

Nu fortsätter vi som i a-delen, med den nya villkoret för $i(0)=4$:

$$i(t) = C_1 e^{-10 \cdot 0} = 4 \Rightarrow C_1 = 4.$$

Därför $i(t) = 4e^{-10t}$

Svar b) $i(t) = 4e^{-10t}$ (ampere)

Exempel 7: I den elektriska kretsen

gäller enligt Kirchhoffs spänningslag relationen: $L \cdot \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) = u(t)$ där L betecknar spolens induktans vid tiden t .

Bestäm strömmen $i(t)$ för $i(0)=0$ ampere i nedanstående LR- krets om

$L=2$ henry , $R= 8$ ohm och

a) $u(t) = 12$ volt.

b) $u(t) = 12e^{-2t}$ V.

Lösning:

$$\text{a) } \begin{cases} L \cdot \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) = u(t) \\ L = 2 \\ R = 8 \\ u(t) = 12 \end{cases} \Rightarrow 2i'(t) + 8i(t) = 12$$

Dividerar med 2: $i'(t) + 4i(t) = 6$

Homogena ekvationen $i'(t) + 4i(t) = 0$ har lösningen $i_H(t) = C_1 e^{-4t}$

Partikulärlösning :

$$i_p(t) = A \Rightarrow i_p'(t) = 0 \Rightarrow 4A = 6 \Rightarrow A = 3/2 \Rightarrow i_p(t) = 3/2$$

Alltså:

$$i(t) = i_H(t) + i_p(t) \Rightarrow i(t) = C_1 e^{-4t} + \frac{3}{2}$$

För att bestämma C_1 använder vi begynnelsevillkoret $i(0) = 0$:

$$i(0) = C_1 e^{-4 \cdot 0} + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{3}{2}$$

$$\text{och } i(t) = -\frac{3}{2} e^{-4t} + \frac{3}{2}$$

$$\text{Svar a) } i(t) = -\frac{3}{2} e^{-4t} + \frac{3}{2}$$

$$\text{b) } \begin{cases} L \cdot \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) = u(t) \\ L = 2 \\ R = 8 \\ u(t) = 12e^{-2t} \end{cases} \Rightarrow 2i'(t) + 8i(t) = 12e^{-2t}$$

Dividerar med 2: $i'(t) + 4i(t) = 6e^{-2t}$

Homogena ekvationen $i'(t) + 4i(t) = 0$ har lösningen $i_H(t) = C_1 e^{-4t}$

Partikulärlösning :

$$i_p(t) = Ae^{-2t} \Rightarrow i_p'(t) = -2Ae^{-2t} \Rightarrow -2Ae^{-2t} + 4Ae^{-2t} = 6e^{-2t} \Rightarrow 2A = 6 \Rightarrow A = 3$$

$$i_p(t) = 3e^{-2t}$$

Alltså:

$$i(t) = i_H(t) + i_p(t) \Rightarrow i(t) = C_1 e^{-4t} + 3e^{-2t}$$

För att bestämma C_1 använder vi begynnelsevillkoret $i(0) = 0$:

$$i(0) = C_1 e^{-4 \cdot 0} + 3e^{-2 \cdot 0} = 0 \Rightarrow C_1 = -3$$

$$\text{och } i(t) = -3e^{-4t} + 3e^{-2t}$$

Svar b) $i(t) = -3e^{-4t} + 3e^{-2t}$

Övningar

Ställa upp ekvationer

1. Ett radioaktivt preparat, som från början var 110 g, sönderfaller med en hastighet som är 7 % av den aktuella mängden per år. Ställ upp en differentialekvation som beskriver detta förlopp.

2. Låt y vara antalet individer i en djurpopulation vid tiden t . Man antar att populationens tillväxthastighet är proportionell mot både y och $M-y$, där M är populationens maximala storlek.

a) Ställ upp en differentialekvation som beskriver detta förlopp. Proportionalitetskonstanten är k .

b) Hur stor är tillväxthastigheten när den är maximal?

3. Folkmängden inom ett område växer med en hastighet som är 3,0 % av den aktuella folkmängden y . Låt x vara tiden i år. Vid $x = 0$ är folkmängden 60 miljoner.

a) Ställ upp en differentialekvation som beskriver folkmängden.

b) Antag nu att tillväxthastigheten går ner linjärt från 3,0 % till 2,0 % under en tioårsperiod, från $x = 0$ till $x = 10$. Ställ upp en differentialekvation som beskriver detta.

4. En tank innehåller 90 liter rent vatten. Saltlösning med koncentrationen 2g/l tillförs med hastigheten 2 l/min. Av den väl blandade lösningen bortförs 2 l/min dvs vätskemängden i tanken är konstant. Vi antar att tanken innehåller y g salt efter tiden x minuter. Ställ upp en differentialekvation som beskriver hur saltmängden ändras.

5. Ett rum med volymen 150 m^3 innehåller $0,002 \text{ mg/m}^3$ av ett hälsofarligt ämne. Luft med $0,0005 \text{ mg/m}^3$ av ämnet tillförs rummet med hastigheten $10 \text{ m}^3/\text{min}$. Väl blandad luft ventileras ut med fläktar från rummet med hastigheten $10 \text{ m}^3/\text{min}$. Vi antar att rummet innehåller y mg av det hälsofarliga ämnet efter x minuter. Ställ upp en differentialekvation med begynnelsevillkor som visar hur mängden av ämnet i rummet förändras.

6. En tank innehåller 30000 liter rent vatten. Vatten som innehåller 0,008 g/l av en förorening tillförs tanken med en hastighet av 600 l/min. Av det väl blandade och förorenade vattnet

bortförs 800 l/min. Vi antar att tanken innehåller y g förorening efter x minuter. Ställ upp en differentialekvation som visar hur y förändras.

Lösa ekvationer

7. En rymdfarkost kommer in i ett stoftmoln med hastigheten 750 m/s och bromsas då så att accelerationen a m/s² är proportionell mot hastigheten v m/s enligt

$$a = -0,0040v$$

Ställ upp en differentialekvation för hastigheten. Beräkna vid vilken tidpunkt hastigheten är 120 m/s.

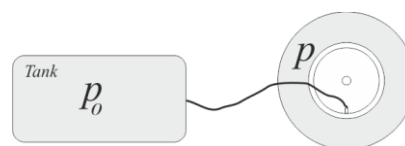
8. En båt som glider fram utan hjälp från motorn bromsas upp av en kraft som är proportionell mot hastigheten.

a) Använd kraftekvationen för att ställ upp en differentialekvation för hastigheten.

b) När båten har hastigheten 4,0 m/s är accelerationen -0,40 m/s² och båtens massa är 2000 kg. Vad är båtens hastighet 3,0 s senare?

9. Vid påfyllning av luft i ett bildäck ansluts däckventilen till en luftbehållare som håller ett konstant lufttryck p_0 . Under påfyllningen är hastigheten på tryckändringen i däck proportionell mot skillnaden mellan trycket i behållaren och trycket i däck. Om p_0 är 1,0 MPa tar det 6,0 sekunder att fylla ett tomt däck till 180 kPa.

Hur lång tid tar det att höja trycket till 270 kPa om däck från början är tomt? Ställ upp en differentialekvation och lös problemet med hjälp av denna. Med tomt däck menas att det har normalt lufttryck, 101,3 kPa.



10. Vid urladdning av en kondensator gäller att $u = -RC \cdot \frac{du}{dt}$ där R och C är konstanter.

a) Bestäm som funktion av t den lösning u till differentialekvationen för vilken $u(0) = U_0$.

b) Sätt $U_0 = 20$ V, $R = 50000 \Omega$ och $C = 1,0 \cdot 10^{-5}$ F och bestäm $u(5)$.

c) Bestäm R om $u(0) = 60$ V, $u(10) = 42$ V och $C = 4,0 \mu\text{F}$.

Facit

1. $\frac{dy}{dt} = -0,07y$, $y(0) = 110$

2. a) $\frac{dy}{dt} = ky(M - y)$ där k är en positiv konstant

b) Tillväxthastigheten är maximal för $\frac{M}{2}$ den är då $\frac{kM^2}{4}$

3.

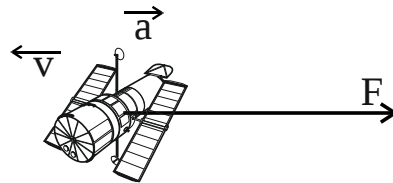
$$a) \frac{dy}{dx} = 0,030y, y(0) = 60$$

$$b) \frac{dy}{dx} = (0,030 - 0,001x)y, y(0) = 60$$

$$4. \frac{dy}{dx} = 4 - \frac{y}{5}, y(0) = 0$$

$$5. \frac{dy}{dx} = 0,005 - \frac{y}{15}, y(0) = 0,3$$

$$6. \frac{dy}{dx} = 4,8 - \frac{4y}{150 - x}, y(0) = 0$$



7.

$$a = -0,0040v$$

$$\frac{dv}{dt} = -0,0040v \quad (\text{Separabel})$$

$$\frac{1}{v} dv = -0,0040 dt \quad \int \frac{1}{v} dv = -\int 0,0040 dt \quad \ln v = -0,0040t + C \quad v = e^{-0,0040t+C}$$

$$v = De^{-0,0040t} \quad v(0) = 750 \text{ m/s} \Rightarrow D = 750$$

$$v = 750e^{-0,0040t}$$

$$120 = 750e^{-0,0040t} \quad e^{-0,0040t} = \frac{120}{750} \quad -0,0040t = \ln\left(\frac{120}{750}\right)$$

$$t = \frac{1}{-0,0040} \cdot \ln\left(\frac{120}{750}\right) \text{ s} = 458 \text{ s}$$

Svar : 460 sekunder senare

8.

$$a) \quad F = k \cdot v$$

$$ma = kv$$

$$m \frac{dv}{dt} = -kv \quad k > 0 \quad (\text{Separabel})$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} v$$

$$v = Ce^{-\frac{k}{m}t} \quad C = v(0)$$

$$b) \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} v \Rightarrow -0,80 = -\frac{k}{2000} \cdot 4,0 \Rightarrow k = 400 \text{ kg/s}$$

$$v = 4,0e^{-\frac{400}{2000}t} \quad v = 4,0e^{-0,20t}$$

$$v(3) = 4,0e^{-0,20 \cdot 3} = 2,195 \text{ m/s}$$

Svar: 2,2 m/s

9.

$$\frac{dp}{dt} = k(p_0 - p) \text{ (Separabel)} \Rightarrow \frac{1}{p_0 - p} dp = k dt$$

$$\int \frac{1}{p_0 - p} dp = \int k dt \quad \Rightarrow \quad \ln|p_0 - p| = kt + C \quad \Rightarrow |p_0 - p| = e^{kt+C}$$

$$p_0 - p > 0 \Rightarrow |p_0 - p| = p_0 - p$$

$$p_0 - p = e^{kt+C}$$

$$p = p_0 - De^{kt} \quad p(0) = 101,3 \text{ kPa} :$$

$$101,3 = 1000 - De^{0 \cdot t} \Rightarrow D = 1000 - 101,3 = 898,7 \text{ kPa}$$

$$p = 1000 - 898,7e^{kt}$$

$$180 = 1000 - 898,7e^{k \cdot 6}$$

$$e^{k \cdot 6} = \frac{180 - 1000}{-898,7} \quad k = \frac{\ln 0,912429}{6} = -0,01527$$

$$p = 1000 - 898,7e^{-0,01527t}$$

$$270 = 1000 - 898,7e^{-0,01527t} \quad e^{-0,01527t} = \frac{270 - 1000}{-898,7} \quad t = \frac{\ln(0,81228)}{-0,01527}$$

$$t = 13,6 \text{ s}$$

Svar: 14 sekunder

$$10. \text{ a) } u(t) = U_0 e^{-t/RC}$$

$$\text{b) } 9,1 \cdot 10^{-4} \text{ V}$$

$$\text{c) } 7,0 \cdot 10^6 \Omega$$