

Inlämning **fredag 16 dec**. Slå ihop alla (uppgift 1-5) till en scriptfil och spara filen. Kolla först att filen funkar som den ska och att alla uppgifter redovisas efter körningen innan den laddas upp i canvas i mappen MatLab inlämning 2.3.

Integraler och differentialekvationer

MATLAB kommandon som är nya för denna inlämning:

<code>int(f,x)</code>	beräknar den obestämda integralen av f med avseende på x . x kan utelämnas.
<code>Int(f,x,a,b)</code>	beräknar den bestämda integralen av f från a till b med avseende på x .
<code>dsolve('ekv','villkor',t)</code>	löser den ordinära differentialekvationen ekv . Villkor för lösningen ges i villkor genom ekvationer av typen $y(a)=b$ eller $Dy(a)=b$ där a och b är konstanter.

Integraler

Exempel 1: a) Bestäm primitiva funktionen $F(x)$ till $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$.

b) Beräkna $\int_3^5 \frac{x^2 + 1}{x} dx$. Svar både i exakt och decimal form.

c) Beräkna $\int_0^1 (\sqrt{\sin x} + e^x) dx$.

I MATLAB:

```
syms x
format compact
% a
f=(x^2+1)/x;
Integralf=int(f,x)           %bestämmer en primitiv funktion där den godtyckliga konstanten C=0.
% b
IntegralExakt=int(f,x,3,5)    % beräknar ett exakt värde på integralen om möjligt.
IntegralNumeriskt=double(IntegralExakt) % beräknar ett numeriskt värde på integralen.
% c
g=sqrt(sin(x))+exp(x);
Integralg=int(g,x,0,1)       % försöker beräkna ett exakt svar på integralen. ger ett svårläst svar.
Numeriskt=double(Integralg)
```

```
Integralf =
log(x) + x^2/2
IntegralExakt =
log(5/3) + 8
IntegralNumeriskt =
8.5108
Integralg =
exp(1) + 2*ellipticE(pi/4, 2) - 2*ellipticE(pi/4 - 1/2, 2) - 1
Numeriskt =
2.3613
```

Svar: a) $F(x) = \ln x + \frac{x^2}{2} + C$ (MATLAB ger en primitiv funktion). b) $\ln\left(\frac{5}{3}\right) + 8 \approx 8,5108$

c) 2,3613

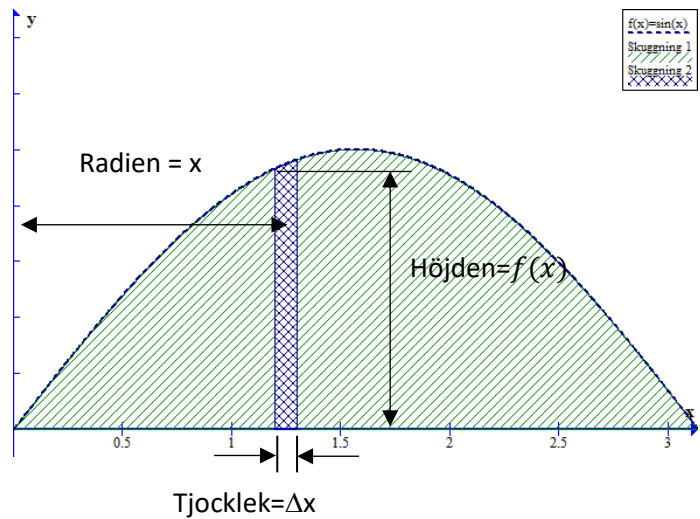
Exempel 2: Ett område begränsas av $0 \leq x \leq \pi$ och $0 \leq y \leq \sin x$. Området roterar runt y-axeln. Bestäm rotationskroppens volym.

Figuren är inte ritad i MATLAB.

Det skuggade området ska rotera kring y-axeln. Rotationskroppen som bildas är inte en solid kropp och använder därför skalmetoden för att beräkna volymen av rotationskroppen:

$$\text{ett skal } \Delta V = 2\pi r h \Delta x = 2\pi x f(x) \Delta x$$

$$\text{hela volymen} = 2\pi \int_0^{\pi} x y dx$$



I MATLAB.

```
syms x
f=sin(x)
Volym=2*pi*int(x*f,x,0,pi)
Volymnum=double(Volym)
```

```
f =
sin(x)
Volym =
2*pi^2
Volymnum =
19.7392
```

Svar: Volymen är $2\pi^2 \approx 19,7$ v.e.

Differentialekvationer

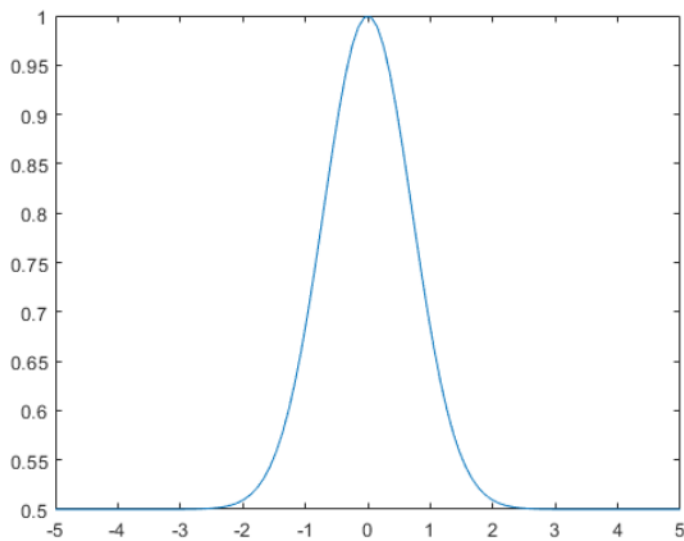
Differentialekvationer består av funktion och dess derivator, använder därför MATLAB kommandot `diff` från inlämningsuppgift 2.2 och nytt för denna inlämning `dsolve` (se början av detta dokument).

Exempel 3: Lös differentialekvationen $y' + 2xy = x$ samt plotta lösningskurvan.

Plottar kurvan för $C=1$ i intervallet $-5 \leq x \leq 5$.

```
syms y(x)           % deklarerar y(x) som symbolisk funktion av x.
DE=diff(y)+2*x*y(x)==x; %definierar differentialekvationen
DEsol=dsolve(DE,x);   %Lös diff.ekv med avseende på y.
pretty(DEsol)
% plottar lösningskurvan för tex C=1. MATLAB anger de godtyckliga
% konstanterna med C1, C2, ...
C1=1;
DEsol=subs(DEsol);    %ersätter den godtyckliga konstanten C1 med värdet 1.
xv=linspace(-5,5);    %genererar 100 st x-värden mellan -10 till 10.
yv=subs(DEsol,x,xv);  %Omvandlar symboliskt uttryck till numeriskt, dvs beräknar y-värden till varje x.
plot(xv,yv)           %plottar lösningskurvan.
```

$$\frac{C1 \exp(-x^2)}{2} + \frac{1}{2}$$



$$\text{Svar: } y(x) = \frac{Ce^{-x^2}}{2} + \frac{1}{2}$$

Exempel 4: Lös differentialekvationen

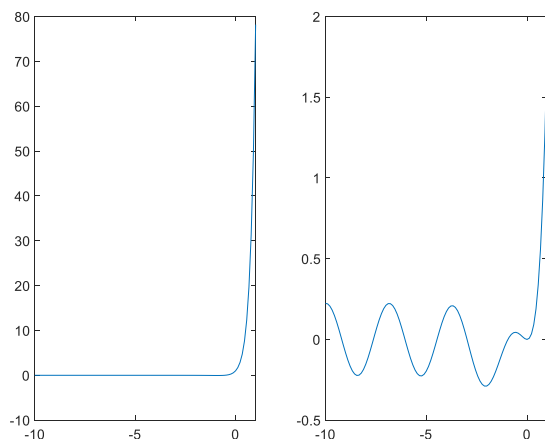
- a) $y'(t) - y(t) = e^{2t}$ med villkoret $y(0) = 1$.
- b) $y''(t) - 2y'(t) - y(t) = \sin(3t)$ med villkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 2$.
- c) Plotta lösningskurvorna från a- och b-uppgifterna. Använd subplot.

I MATLAB:

```
syms y(t) %deklarerar y(t) som symbolisk funktion av t.
% a
DE=diff(y)-4*y(t)==exp(2*t); %definierar diff.ekv
Villkor=y(0)==1; %anger villkoret
DEsola=dsolve(DE,Villkor,t); % Löser diff.ekv. Alternativ kan man skriva DEsol=dsolve(DE,y(0)==1,t).
pretty(DEsola)
% b
DE=diff(y,t,2)-3*diff(y)+2*y(t)==sin(2*t)+cos(2*t); %definierar diff.ekv
V1=y(0)==0; %Villkor 1
Dy=diff(y);
V2=Dy(0)==0; %villkor 2
DEsolb=dsolve(DE,V1,V2,t); % Löser diff.ekv. Alternativ kan man skriva DEsol=dsolve(DE,y(0)==1,t).
pretty(DEsolb) % omskrivning till lättläslig form.

% c-uppgift, omvandlar symboliskt till numeriskt för att plotta kurvorna.
tv=linspace(-10,1); %genererar 100 st t-värden. Samma värden till båda kurvorna.
yv1=subs(DEsola,t,tv); %beräknar första kurvans funktionsvärden till varje t-värde.
yv2=subs(DEsolb,t,tv); %beräknar andra kurvans funktionsvärden till varje t-värde.
subplot(1,2,1); %delar upp grafikfönstret i två delfönster, första grafen i första delfönster.
plot(tv,yv1) %Ritar första kurvan i vänstra delfönstret.
subplot(1,2,2) %andra delfönstret
plot(tv,yv2) %Ritar andra kurvan i högra delfönstret.
```

$$\frac{\exp(4t)}{2} - \frac{\exp(2t)}{2}$$
$$\frac{\exp(2t)}{2} - \frac{3\exp(t)}{5} + \frac{\sqrt{5}\cos(2t + \arctan(2))}{10}$$



Svar: a) $y(t) = \frac{3e^{4t}}{2} - \frac{e^{2t}}{2}$ b) $y(t) = \frac{e^{2t}}{2} + \frac{3e^t}{5} + \frac{\sqrt{5}\cos(2t + \arctan(2))}{10}$

Extra träning, lös uppgifterna 1, 3, 4 och 5 för hand och kontroller att du har fått samma svar som i MATLAB.

Uppgift 1: Bestäm

a) $\int x \sin(2x) dx$.

b) $\int \frac{2}{1+4x^2} dx$

c) Beräkna $\int_0^{\pi/2} 3 \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$

Uppgift 2: Betrakta funktionen $f(x) = e^{-(x-6)^2}$. (Använd kommandot `double` för att få ett numeriskt värde).

a) Plotta grafen till $f(x)$ i intervallet $5 \leq x \leq 8$.

b) Beräkna arean av det område som begränsas av $5 \leq x \leq 8$ och $0 \leq y \leq f(x)$. Använd kommandot `double` för att få ett numeriskt värde på arean.

Uppgift 3: $f(x) = x^2 + 1$ (Använd kommandot `double` för att få ett numeriskt värde).

a) Beräkna volymen av den kropp som uppstår vid rotation av området $-1 \leq x \leq 3$ och $0 \leq y \leq f(x)$ kring x-axeln. **Tips** använd skivmetoden.

b) Beräkna längden av kurvan $f(x)$ för intervallet $-1 \leq x \leq 3$. Använd formeln

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} .$$

Uppgift 4: Lösa följande differentialekvationer.

a) $y'(t) - 5y(t) = 0$, $y(0) = 2$.

b) $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = t^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$.

c) $y''(t) + 4y(t) = 0$, $y(0) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

d) plotta alla lösningskurvor, a- och b-uppgiften i intervallet $0 \leq t \leq 1$ och c-uppgiften i intervallet $-2 \leq t \leq 6$. Använd `subplot`.

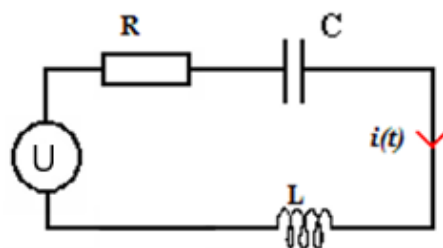
Uppgift 5: Strömmen i LCR-kretsen kan beskrivas med följande ekvation

$$Li''(t) + Ri'(t) + \frac{1}{C}i = 0 \text{ där } U = 50 \text{ V, } L = 1 \text{ H,}$$

$$R = 20 \Omega, C = 0,01 \text{ F.}$$

Bestäm strömmen $i(t)$ för villkoren $i(0) = 2 \text{ A}$

och $i'(0) = 10 \text{ A/s}$.



Svar:

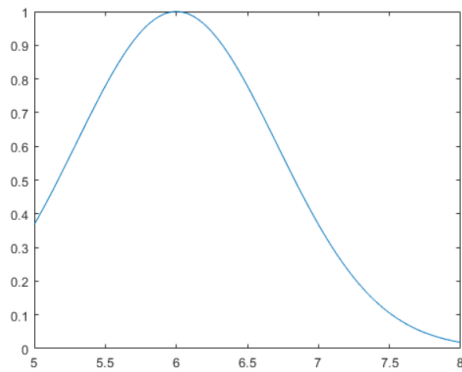
1. a)

$$\frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x(2\sin x^2 - 1)}{2} = \frac{\sin(2x)}{4} - \frac{x \cos 2x}{2}$$

c) $3\sqrt{2}$

b) $\arctan(2x)$

2.



a)

b) Area=1,6289 a.e

3. Volym= 224,5192 v.e

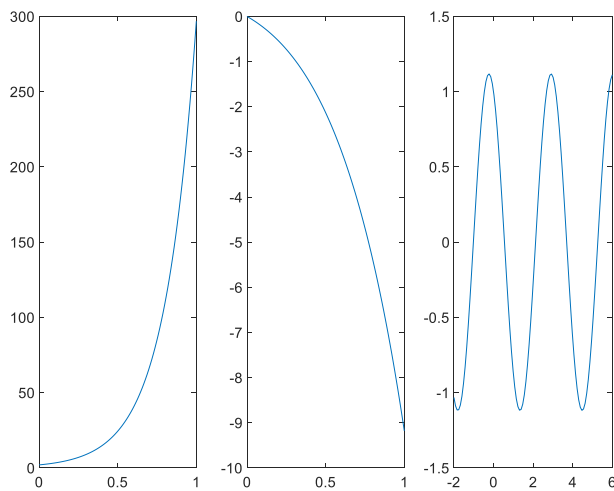
Längd= 11,2260

4. a) $y(t) = 2e^{5t}$

b) $y(t) = \frac{3t}{2} - \frac{7e^{2t}}{4} + \frac{t^2}{2} + \frac{7}{4}$

c) $y(t) = \cos(2t) - \frac{\sin(2t)}{2}$

d)



5. $i(t) = 2e^{-10t} (15t + 1)$