

SEPARABLA DIFFERENTIALEKVATIONER

En differentialekvation (DE) av **första ordningen** sägs vara separabel om den kan skrivas på formen $P(y)\frac{dy}{dx} = Q(x)$ eller ekvivalent

$$P(y)dy = Q(x)dx . \quad (1)$$

Den allmänna lösningen till (1) erhålles genom att integrera båda leden i (1)

$$\int P(y)dy = \int Q(x)dx . \quad (2)$$

Förklaring: Anta att $y(x) = h(x)$ är en lösning till $P(y)\frac{dy}{dx} = Q(x)$. Då gäller

$P(h(x))\frac{d(h(x))}{dx} = Q(x)$. Om vi integrerar på x båda leden i sista ekvationen får vi

$\int P(h(x))\frac{d}{dx}(h(x))dx = \int Q(x)dx$ och genom att använda substitutionen

$h(x) = y \Rightarrow h'(x)dx = dy$ får vi $\int P(y)dy = \int Q(x)dx$ dvs (2).

För att kolla om en differentialekvation av första ordningen $L(x,y,y') = R(x,y,y')$ är separabel, och därefter lösa den, gör vi följande enkla steg:

STEG 1. Lös ut explicit första derivatan $y' = F(x,y)$

STEG 2. Faktorisera högerledet i faktorer som innehåller endast en variabel x eller y, om detta är möjligt:

$$\text{t ex } y' = f(x)g(y) \quad \text{eller} \quad y' = \frac{f(x)g(y)}{h(x)k(y)}$$

Om det är **omöjligt att faktorisera i faktorer med endast en variabel** då är ekvationen **inte separabel**.

STEG 3. Ersätt y' med $\frac{dy}{dx}$ och separera variabler dvs flytta "y-faktorer" till vänster och "x-faktorer" till höger och ange ekvationen på formen

$$A(y)dy = B(x)dx$$

Den delen ska man hantera försiktigt. När man delar en ekvation med ett uttryck som innehåller en obekant, måste man kolla om uttrycket som man delar med innehåller en eller flera lösningar till ekvationen. Annars kan man tappa några lösningar.

STEG 4. Du får lösningen genom att integrera båda leden

$$\int A(y)dy = \int B(x)dx + C$$

(Det räcker att addera konstanten C till högerleden)

STEG 5. Förenkla lösningen och, om möjlig, ange y på explicit form $y = f(x)$.

STEG 6. Kolla om ekvationen har singulära lösningar.

Uppgift 1 a) Lös ekvationen $10y' - x^3y^2 = 4x^3$.

b) Är ekvationen $y' - y^2 = x^3$ separabel?

Lösning 1a:

STEG 1. Vi lös ut y' :

$$10y' - x^3y^2 = 4x^3 \Rightarrow y' = \frac{4x^3 + x^3y^2}{10}$$

STEG 2. Vi faktorisera högerledet i faktorer som innehåller endast en variabel x eller y (om detta är möjligt):

$$y' = \frac{x^3(4 + y^2)}{10}$$

STEG 3. Vi ersätter y' med $\frac{dy}{dx}$, separerar variabler och får

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3(4 + y^2)}{10} \Rightarrow \text{(separera var.)} \quad \frac{dy}{4 + y^2} = \frac{x^3}{10} dx \quad (\text{notera att } 4 + y^2 \neq 0)$$

STEG 4. Integrera båda leden

$$\int \frac{dy}{4 + y^2} = \int \frac{x^3}{10} dx \quad (\text{formelsamling})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{x^4}{40} + C \quad \text{den allmänna lösningen på implicit form.}$$

STEG 5. Vi anger y på explicit form $y=y(x)$:

$$\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{x^4}{40} + C \Rightarrow \arctan\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{x^4}{20} + 2C \Rightarrow \frac{y}{2} = \tan\left(\frac{x^4}{20} + 2C\right) \Rightarrow y = 2 \tan\left(\frac{x^4}{20} + 2C\right)$$

Svar 1a: $y = 2 \tan\left(\frac{x^4}{20} + 2C\right)$ den allmänna lösningen på explicit form.

Lösning 1b: Är ekvationen $y' - y^2 = x^3$ separabel?

Steg 1 $y' = x^3 + y^2$. Vi kan inte faktorisera $x^3 + y^2$ i produkt av faktorer som innehåller endast en variabel x eller y . Därför är ekvationen INTE separabel.

Svar 1b: Nej

Uppgift 2.

Lös följande differentialekvation med avseende på $y(x)$

$$y' = \frac{(x^2 + 5x + 3 + e^{8x})}{y^3 + y + \cos y}.$$

Lösning:

Först ersätter vi y' med $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + 5x + 3 + e^{8x})}{y^3 + y + \cos y},$$

och därefter separerar variabler

$$(y^3 + y + \cos y)dy = (x^2 + 5x + 3 + e^{8x})dx$$

Slutligen integrerar vi båda leden:

$$\int (y^3 + y + \cos y)dy = \int (x^2 + 5x + 3 + e^{8x})dx$$

$$\frac{y^4}{4} + \frac{y^2}{2} + \sin y = \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 3x + \frac{e^{8x}}{8} + C, \text{ den allmänna lösningen (på implicit form).}$$

$$\textbf{Svar: } \frac{y^4}{4} + \frac{y^2}{2} + \sin y = \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 3x + \frac{e^{8x}}{8} + C$$

Uppgift 3.

a) Lös följande differentialekvation med avseende på $y(x)$

$$y' = (x^2 + x + 3 + e^{5x})(1 + y^2).$$

b) Ange lösningen på explicit form.

Lösning:

Först ersätter vi y' med $\frac{dy}{dx}$ och därefter separerar variabler:

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 + x + 3 + e^{5x})(1 + y^2) \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{(1 + y^2)} = (x^2 + x + 3 + e^{5x})dx$$

Vi har separerat variabler. Det kvarstår att integrera båda leden:

$$\int \frac{dy}{(1 + y^2)} = \int (x^2 + x + 3 + e^{5x})dx \Rightarrow$$

$$\arctan(y) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{e^{5x}}{5} + C \quad (\text{den allmänna lösningen på implicit form}).$$

b) Explicit form:

Vi löser ut y ur föregående ekvation och får

$$y = \tan\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{e^{5x}}{5} + C\right) \quad (\text{den allmänna lösningen på explicit form}).$$

Uppgift 4. Partikulär lösning

a) Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen

$$\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = 8x^3.$$

b) Ange lösningen på explicit form.

c) Bestäm en lösning som satisfierar

$$y(0) = \frac{1}{2} \quad (\text{begynnelsevillkoret}).$$

Lösning:a) Notera att ekvationen inte är definierad för $y = \pm 1$.Först ersätter vi y' med $\frac{dy}{dx}$ och därefter separerar variabler:

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 8x^3 dx.$$

Vi integrerar båda leden och får

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int 8x^3 dx \Rightarrow \quad (\text{formelsamling})$$

$$\Rightarrow \arcsin y = 2x^4 + C \quad (\text{den allmänna lösningen på implicit form}).$$

b) Explicit form:

Vi löser ut y ur föregående ekvation och får

$$y = \sin(2x^4 + C) \quad (\text{den allmänna lösningen på explicit form}).$$

c) Vi använder villkoret $y(0) = \frac{1}{2}$ för att bestämma C i den allmänna lösningen,

$$\sin(0 + C) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Härav } C = \frac{\pi}{6}. \quad (\text{Anmärkning: Man kan använda ett av värdena } C = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ eller}$$

$$C = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi.)$$

och $y = \sin(2x^4 + \frac{\pi}{6})$ är en **partikulär lösning** som satisfierar givet villkor.Notera igen att ekvationen $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 8x^3 dx$ är inte definierad om $y = \pm 1$ dvs om

$$\sin(2x^4 + \frac{\pi}{6}).$$

Uppgift 5. Singulära lösningar

a) Bestäm alla lösningar till ekvationen

$$y' = 3\sqrt{4-y^2}. \quad (*)$$

Lösning:

a) Först ersätter vi y' med $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = 3\sqrt{4-y^2}.$$

När man delar en ekvation med ett uttryck som innehåller en obekant måste man kolla om uttrycket som man delar med innehåller en eller flera lösningar till ekvationen. Annars kan man tappa några lösningar.

För att separera variabler delar vi föregående ekvation med $\sqrt{4-y^2}$ och därför antar att

$$\sqrt{4-y^2} \neq 0. \text{ Alltså fortsättning gäller om } y \neq \pm 2.$$

Men vad gäller i fallet $y = 2$ eller $y = -2$?

Omedelbart inses att de två konstanta funktioner satisfierar ekvationen (*).

(t ex $y = 2 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow$ båda leden i ekvationen (*) är lika med 0)

Alltså har vi fått två "speciella" lösningar.

Om de inte omfattas av den allmänna lösningen då kallas sådana "speciella" lösningar för **singulära lösningar**.

Vi fortsätter med separation och integration för att få den allmänna lösningen.

$$\frac{dy}{\sqrt{4-y^2}} = 3dx \Rightarrow$$

$$\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) = 3x + C \Rightarrow$$

$$\frac{y}{2} = \sin(3x + C) \Rightarrow$$

$$y = 2\sin(3x + C) \quad (\text{Den allmänna lösningen}).$$

De två "speciella" lösningar $y = 2$, $y = -2$ finns inte bland de allmänna lösningarna, (Det finns **inte** något C -värde sådant att $y = 2\sin(3x + C)$ blir $y = 2$ eller $y = -2$ och därför kallas de för singulära lösningar.)

Svar: Ekvationen har följande lösningar:

$$y = 2\sin(3x + C) \quad (\text{Den allmänna lösningen}),$$

$$y = 2, \quad (\text{singulär lösning})$$

$$y = -2 \quad (\text{singulär lösning})$$

Uppgift 6.

Betrakta ekvationen

$$(1-x)y' = y-3.$$

a) Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen.

b) Skriv lösningen på explicit form d v s på formen $y = f(x)$.

c) Bestäm den lösning som satisfierar begynnelsevillkoret $y(0) = 0$.

Lösning:

a)

$$(1-x)y' = y-3 \Rightarrow (1-x)\frac{dy}{dx} = y-3 \Rightarrow$$

(Vi delar med $(y-3)$ och antar att $y \neq 3$. Omedelbart inses att funktionen $y = 3$ är en lösning till ekvationen)

$$\frac{dy}{y-3} = \frac{dx}{1-x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y-3} = \int \frac{dx}{1-x}$$

$$\Rightarrow \ln|y-3| = -\ln|1-x| + C \quad (\text{den allmänna lösningen på implicit form}).$$

b) Från föregående ekvation får vi

$$|y-3| = e^{-\ln|1-x|+C} \Rightarrow y-3 = \pm e^C e^{-\ln|1-x|}$$

$$(\text{Vi förenklar } e^{-\ln|1-x|} = (e^{\ln|1-x|})^{-1} = \frac{1}{|1-x|} = \frac{1}{\pm(1-x)})$$

$$y-3 = \pm e^C \cdot \frac{1}{\pm(1-x)}$$

Vi betecknar konstanten $\pm e^C \cdot \frac{1}{\pm 1} = D$ och får

$$\Rightarrow y-3 = \frac{D}{1-x}$$

$$\Rightarrow y = 3 + \frac{D}{1-x}. \quad (\text{den allmänna lösningen på explicit form som}$$

dessutom inkluderar den "speciella" lösningen $y=3$)

c)

$$y(0) = 0 \Rightarrow D = -3 \Rightarrow y = 3 - \frac{3}{1-x} \Rightarrow$$

$$y = \frac{3x}{x-1}$$

Svar: **a)** $\ln|y-3| = -\ln|1-x| + C$ **b)** $y = 3 + \frac{D}{1-x}$ **c)** $y = \frac{3x}{x-1}$

Uppgift 7.

Lös ekvationen med avseende på $v(t)$

$$\frac{dv}{dt} = 9 - v^2$$

$$v(0)=0.$$

Ange lösning på explicit form.

Lösning:

För att separera variabler delar vi ekvationen med $9-v^2$ under antagande $9-v^2 \neq 0$

$$\frac{dv}{9-v^2} = dt, \text{ dvs } v \neq \pm 3.$$

Anmärkning:

Funktionerna $v = 3$ och $v = -3$, uppenbart satisfierar ekvationen $\frac{dv}{dt} = 9 - v^2$, men inte villkoret $v(0)=0$, alltså är de INTE lösningar till vår begynnelsevärdesproblem.

Vi integrerar ekvationen:

$$\int \left| \frac{dv}{9-v^2} \right| = \int dt \Rightarrow \frac{1}{6} \ln \left| \frac{3+v}{3-v} \right| = t + C \quad (\text{Den allmänna lösningen på implicit form}).$$

Vi löser ut v .

$$\Rightarrow \ln \left| \frac{3+v}{3-v} \right| = 6t + 6C \Rightarrow \frac{3+v}{3-v} = \pm e^{6t+6C}$$

$$\Rightarrow \frac{3+v}{3-v} = De^{6t} \Rightarrow 3+v = (3-v)De^{6t} \Rightarrow v + vDe^{6t} = -3 + 3De^{6t}$$

$$v(1 + De^{6t}) = 3(-1 + De^{6t}) \Rightarrow$$

$$v = \frac{3(-1 + De^{6t})}{(1 + De^{6t})} \quad (\text{Den allmänna lösningen på explicit form}).$$

Slutligen bestämmer vi D ,

$$v(0)=0 \Rightarrow 0 = \frac{3(-1 + D)}{(1 + D)} \Rightarrow D=1 \Rightarrow$$

$$v = \frac{3(-1 + e^{6t})}{(1 + e^{6t})} \quad (\text{den partikulära lösningen som satisfierar begynnelsevillkoret}).$$

$$\text{Svar: } v = \frac{3(e^{6t} - 1)}{(e^{6t} + 1)}$$

Uppgift 8.

Betrakta ekvationen:

$$\frac{y'}{\cos(x)} = y^2 + 1$$

- Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen.
- Bestäm den lösning som satisfierar $y(0) = 1$.
- Skriv lösningen på explicit form dvs på formen $y = f(x)$.

Lösning:

$$\text{a) } \frac{y'}{\cos(x)} = y^2 + 1 \Rightarrow y' = (y^2 + 1) \cos x \Rightarrow \frac{dy}{y^2 + 1} = \cos x dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int \cos x dx \Rightarrow$$

$\arctan y = \sin x + C$ (Den allmänna lösningen på implicit form).

(samma lösningen på explicit form: $y = \tan(\sin(x) + C)$).

$$\text{b) } y(0) = 1 \Rightarrow \arctan 1 = \sin 0 + C \Rightarrow \frac{\pi}{4} = C$$

$$\Rightarrow \arctan y = \sin x + \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{c) Explicit form: } y = \tan\left(\sin x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{Svar: a) } \arctan y = \sin x + C \quad \text{b) } \arctan y = \sin x + \frac{\pi}{4} \quad \text{c) } y = \tan\left(\sin x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Uppgift 9.

a) (2p) Lös följande differentialekvation

$$y' = \frac{3y-1}{x}.$$

Ange lösningen på explicit form.

b) (2p) Lös följande differentialekvation

$$y' - x^2 \sqrt{1-y^2} = x^5 \sqrt{1-y^2}.$$

Bestäm även eventuella singulära lösningar.

Lösning:

a)

$$y' = \frac{3y-1}{x}$$

(Anmärkning: Vi delar ekvationen med $3y-1$ om uttrycket är skilt från 0.

Substitutionen $y = 1/3, y' = 0$ i ekvationen visar att den konstanta funktionen är också en lösning. En sådan lösning kallas singulär om den inte kan fås ur den allmänna lösningen.)

$$\frac{y'}{3y-1} = \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\int \frac{y'}{3y-1} dx = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow$$

$$\frac{\ln |3y-1|}{3} = \ln |x| + C \Rightarrow$$

$$\ln |3y-1| = 3 \ln |x| + 3C \Rightarrow$$

$$\ln |3y-1| = \ln |x|^3 + 3C \Rightarrow$$

$$|3y - 1| = e^{\ln|x|^3 + 3C} \Rightarrow$$

$$3y - 1 = \pm e^{3C} e^{\ln|x|^3} \Rightarrow$$

$$y = \frac{1 + Dx^3}{3}$$

Svar a: $y = \frac{1 + Dx^3}{3}$ är den allmänna lösningen på explicit form.

(Anmärkning: Formeln innehåller också den konstanta lösningen $y=1/3$; alltså ingen singular lösning i detta fall)

b)

$$y' - x^2 \sqrt{1 - y^2} = x^5 \sqrt{1 - y^2} \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \sqrt{1 - y^2} + x^5 \sqrt{1 - y^2} \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 + x^5) \sqrt{1 - y^2}$$

(Vi delar ekvationen med $\sqrt{1 - y^2}$ om uttrycket är skilt från 0. Substitutionen

$y = \pm 1, y' = 0$ i ekvationen visar att de två konstanta funktioner är också lösningar till ekvationen. En sådan lösning kallas singular om den inte kan fås ur den allmänna lösningen.)

$$\frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = (x^2 + x^5) dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \int (x^2 + x^5) dx \Rightarrow \arcsin y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{6} + C \Rightarrow$$

$$y = \sin\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{6} + C\right)$$

Den allmänna lösningen är alltså $y = \sin\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{6} + C\right)$.

De två ”speciella” lösningar $y = 1$, $y = -1$ finns inte bland de allmänna lösningar,

Det finns **inte** något C-värde sådant att $y = \sin\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{6} + C\right)$ blir den konstanta funktionen

$y = 1$ (för alla x) eller $y = -1$ (för alla x). (De kan ha samma värde i några punkter men INTE i ALLA punkter). Därför kallas (konstanta) funktionerna $y = 1$ och $y = -1$ för singulara lösningar.

Svar b: Den allmänna lösningen är $y = \sin\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{6} + C\right)$.

Ekvationen har dessutom två singulara lösningar är $y = 1$ och $y = -1$.