



KTH Teknik och hälsa

Kurs:	HF1006
Moment:	TEN2, 4 hp
Program:	TIDAA, TIELA, TIMEL
Examinator:	Maria Shamoun
Jourhavande lärare:	Maria Shamoun, tel. 08 790 9712
Datum:	2022-08-24
Tid:	14:00-17:00
Hjälpmedel:	Formelblad
Omfattning och betygsgränser:	För betyget Fx krävs 11p. För betyget E krävs 12p - 18p.
Övrig information:	Undvik röda pennor. Skriv namn och personnummer på varje papper. Skriv bara på papprets ena sida. Inlämnade uppgifter skall markeras med kryss på försättsbladet. Till samtliga uppgifter krävs fullständiga lösningar. Lösningarna skall vara väl motiverade, tydliga och lätta att följa. Svaret ska framgå tydligt. Tentamenlydelsen ska lämnas in tillsammans med lösningarna. Lycka till!

1. **(2p)** Bestäm inversen f^{-1} till funktionen $f(x) = e^{x+1} - 1$, $x \in \mathbb{R}$ samt definitionsmängden till f^{-1} .

2. **(2p)** Beräkna $f'(\pi/2)$ om $f(x) = 5x \cdot \cos 6x$.

3. **(2p)** Bestäm definitions- och värdemängd för $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

4. **(2p)** Bestäm en ekvation för tangenten till $y = \sqrt{4-x^2}$ i punkten $x=0$.

5. **(3p)** Bestäm

a) (1p) $\int \frac{1}{1+4x^2} dx$

b) (2p) $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+9}} dx$.

6. **(3p)** Bestäm lösningen till följande differentialekvation: $y'' - 8y' + 16y = 16x + 1$, med villkoren: $y(0) = 0$ och $y'(0) = 0$.

7. **(2p)** Bestäm den allmänna lösningen $y(x)$ till differentialekvationen $y' = e^{x+y}$.

8. **(2p)** Ett område begränsas av kurvan $y = x^3$, y -axeln, linjen $y=0$ och linjen $y=1$. Området roterar runt y -axeln. Bestäm rotationskroppens volym.

Lösningsförslag

1. **(2p)** Bestäm inversen f^{-1} till funktionen $f(x) = e^{x+1} - 1$, $x \in \mathbb{R}$ samt definitionsmängden till f^{-1} .

$$y = e^{x+1} - 1 \Rightarrow y + 1 = e^{x+1} \Rightarrow \ln(y + 1) = x + 1 \Rightarrow x = \ln(y + 1) - 1$$

$$\text{Svar: } f^{-1}(x) = \ln(x + 1) - 1, x > -1$$

Rättningsmall: Korrekt f^{-1} , 1p och allt rätt, 2p

2. **(2p)** Beräkna $f'(\pi/2)$ om $f(x) = 5x \cdot \cos 6x$.

Derivera enligt produktregeln:

$$f'(x) = 5 \cdot \cos 6x + 5x \cdot (-\sin 6x) \cdot 6 = 5 \cdot \cos 6x - 30x \cdot \sin 6x$$

$$f'(\pi/2) = 5 \cdot \cos 6 \cdot \frac{\pi}{2} - 30 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sin 6 \cdot \frac{\pi}{2} = 5 \cdot \cos 3\pi - 15\pi \cdot \sin 3\pi = -5$$

$$\text{Svar: } f'(\pi/2) = -5$$

Rättningsmall: korrekt derivering ger 1p, allt rätt ger 2p.

3. **(2p)** Bestäm definitions- och värdemängd för $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

Uttrycket $\sqrt{4-x^2}$ är definierad för $\sqrt{4-x^2} \geq 0$ men $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ är definierad för

$$\sqrt{4-x^2} > 0 \Rightarrow 4-x^2 > 0. \text{ Vi vet att } 4-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2. \text{ För } -2 < x < 2 \text{ är } \sqrt{4-x^2} > 0.$$

Eftersom $4-x^2 > 0$ ger att högsta värdet är 4 och lägst värde är 0 vilket ger

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2} \text{ och } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \infty, \text{ dvs att värdemängden är } y \geq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Svar: Definitionsmängden är } -2 < x < 2 \text{ och värdemängden är } y \geq \frac{1}{2}.$$

Rättningsmall: 1p/korrekt svar

4. **(2p)** Bestäm en ekvation för tangenten till $y = \sqrt{4-x^2}$ i punkten med x-koordinaten 0.

$f(0) = \sqrt{4-0^2} = 2$ och tangentens lutning ges av $f'(0)$:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow f'(0) = -\frac{0}{\sqrt{4-0^2}} = 0$$

Tangentens ekvation blir $y - 2 = 0(x - 0) \Rightarrow y = 2$

Svar: $y = 2$

Rättningsmall: korrekt derivering och bestämning av $f'(0)$ ger 1p, allt rätt ger 2p.

5. **(3p)**

a) (1p) Bestäm $\int \frac{1}{1+4x^2} dx$

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx = \frac{1}{2} \arctan 2x + C$$

b) (2p) Bestäm $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+9}} dx$.

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+9}} dx = \left[\begin{array}{l} \text{variabelsubstitution} \\ t = 2x^2 + 9 \\ dt = 4x dx \\ \frac{1}{4} dt = x dx \end{array} \right] = \int \frac{1}{4\sqrt{t}} dt = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{t}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{\sqrt{t}}{2} + C = \frac{\sqrt{2x^2+9}}{2} + C$$

Rättningsmall:

a) allt rätt, 1p

b) Tydlig redovisning av variabelbyte och korrekt integration $\frac{\sqrt{t}}{2}$, 1p

eller

Tydlig redovisning av variabelbyte och korrekt integration $\frac{\sqrt{t}}{2} + C$, 1p

eller

Tydlig redovisning av variabelbyte och korrekt integration, $\frac{\sqrt{2x^2+9}}{2}$, 1p.

eller

Tydlig redovisning av variabelbyte, korrekt integration och svar, $\frac{\sqrt{2x^2+9}}{2} + C$, 2p

6. **(3p)** Bestäm lösningen till följande differentialekvation: $y'' - 8y' + 16y = 16x + 1$, med villkoren: $y(0) = 0$ och $y'(0) = 0$.

Karakteristisk ekvation: $r^2 - 8r + 16 = (r - 4)^2 = 0$ som har lösningen $r = 4$ (dubbelrot)

Homogena lösning: $y_h = (Cx + D) \cdot e^{4x}$

Antag att det finns en partikulärlösning $y_p = ax + b$. Då blir $y'_p = a$ och $y''_p = 0$.

Insättning ger:

$$0 - 8(a) + 16(ax + b) = 16x + 1$$

$$-8a + 16ax + 16b = 16x + 1$$

$$\begin{cases} 16a = 16 \\ -8a + 16b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ -8 \cdot 1 + 16b = 1 \Rightarrow b = \frac{9}{16} \end{cases}$$

$$y_p = x + \frac{9}{16}$$

$$\text{Allmänna lösningen: } y = (Cx + D)e^{4x} + x + \frac{3}{4}$$

Bestäm partikulärlösning m.h.a. villkoren:

$$y(0) = 0 \Rightarrow (C \cdot 0 + D) \cdot e^{4 \cdot 0} + 0 + \frac{9}{16} = D + \frac{9}{16} = 0 \Rightarrow D = -\frac{9}{16}$$

$$y' = Ce^{4x} + 4 \cdot (Cx + D) \cdot e^{4x} + 1$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow Ce^{4 \cdot 0} + 4 \cdot (C \cdot 0 + D) \cdot e^{4 \cdot 0} + 1 = C + 4D + 1 = 0$$

$$C = -1 - 4D = -1 - 4 \cdot \left(-\frac{9}{16}\right) = -1 + \frac{9}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\text{Alltså: } y = \left(\frac{5x}{4} - \frac{9}{16}\right) \cdot e^{4x} + x + \frac{9}{16}$$

$$\textbf{Svar:} \text{ Lösningen är } y = \left(\frac{5x}{4} - \frac{9}{16}\right) \cdot e^{4x} + x + \frac{9}{16}$$

Rättningsmall: Korrekt homogen lösning y_h , 1p

Korrekt partikulär lösning y_p , 1p

All korrekt, 3p

7. **(2p)** Bestäm den allmänna lösningen $y(x)$ till differentialekvationen $y' = e^{x+y}$.

$$y' = e^{x+y}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot e^y$$

$$e^{-y} dy = e^x dx$$

$$\int e^{-y} dy = \int e^x dx$$

$$-e^{-y} = e^x + C$$

$$e^{-y} = -e^x - C = -e^x + D$$

$$-y = \ln(D - e^x)$$

$$y = -\ln(D - e^x)$$

Rättningsmall: Korrekt allmän lösning på implicit form, 1p.

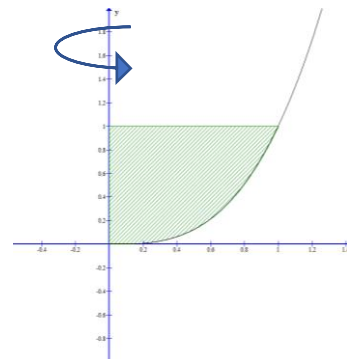
Allt korrekt, 2p

8. **(2p)** Ett område begränsas av kurvan $y = x^3$, y-axeln, linjen $y=0$ och linjen $y=1$. Området roterar runt y-axeln. Bestäm rotationskroppens volym.

Använder skivmetoden. Eftersom området roterar runt y-axeln måste kroppen skivas vinkelrätt mot y-axeln. Integralen kommer att tas i y-led.

$$V = \int_0^1 \pi x^2 dy = \left[y = x^3 \right] = \int_0^1 \pi y^{\frac{2}{3}} dy = \pi \cdot \left[\frac{y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{3\pi}{5} \cdot (1^{\frac{5}{3}} - 0^{\frac{5}{3}}) = \frac{3\pi}{5} \cdot (1 - 0) = \frac{3\pi}{5}$$



Svar: $\frac{3\pi}{5}$

Rättningsmall:

Rätt uppställd integral och integrationen korrekt (utan integrationsgränser ok), 1p

Allt korrekt, 2p

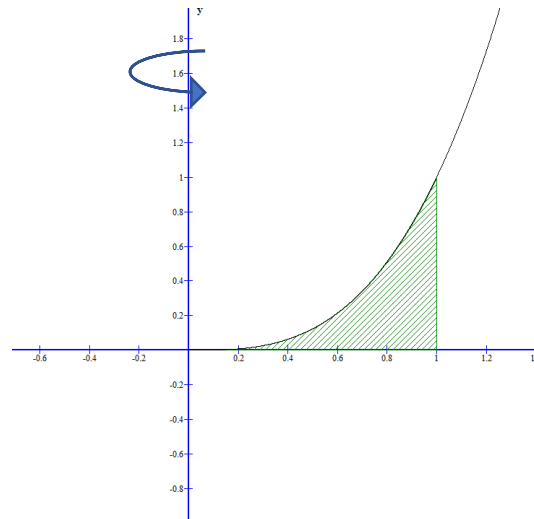
Alternativ lösning med skalmetoden:

Beräknar volymen som skapas mellan kurvan, x-axeln och linjen $x=1$, se figuren bredvid.

$$V_1 = 2\pi \int_0^1 xy dx = \left[\begin{array}{l} y = x^3 \\ y = 0 \text{ ger } x = 0 \\ y = 1 \text{ ger } x = 1 \end{array} \right] =$$

$$= 2\pi \int_0^1 x^4 dx = 2\pi \cdot \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 =$$

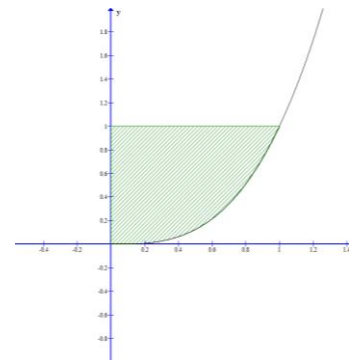
$$= 2\pi \cdot \left(\frac{1^5}{5} - \frac{0^5}{5} \right) = 2\pi \cdot (1 - 0) = \frac{2\pi}{5}$$



Beräkna volymen av en cylinder med radien 1 och höjden 1: $V_2 = \pi r^2 h = \pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \pi$

Volymen av den sökta rotationskroppen är $V = V_2 - V_1$:

$$V = \pi - \frac{2\pi}{5} = \frac{5\pi - 2\pi}{5} = \frac{3\pi}{5}$$



Rättningsmall:

Volymen V_1 korrekt beräknad, 1p

Allt korrekt, 2p