



KTH Teknik och hälsa

Kurs:	HF1006
Moment:	TEN2, 4 hp
Program:	TIDAA, TIELA, TIMEL
Examinator:	Maria Shamoun
Jourhavande lärare:	Maria Shamoun, tel. 08 790 9712
Datum:	2022-08-19
Tid:	08.00 - 11.00
Hjälpmedel:	Formelblad
Omfattning och betygsgränser:	För betyget Fx krävs 11p. För betyget E krävs 12p - 18p.
Övrig information:	Undvik röda pennor. Skriv namn och personnummer på varje papper. Skriv bara på papprets ena sida. Inlämnade uppgifter skall markeras med kryss på försättsbladet. Till samtliga uppgifter krävs fullständiga lösningar. Lösningarna skall vara väl motiverade, tydliga och lätta att följa. Svaret ska framgå tydligt. Tentamenlydelsen ska lämnas in tillsammans med lösningarna. Lycka till!

1. **(2p)** Bestäm definitionsmängden för $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} + \tan x$.

2. **(2p)** Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x - 1}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}$.

3. **(2p)** Beräkna $f''(1)$ om $f(x) = x - \arctan(2x)$.

4. **(3p)** Bestäm

a) (1p) $\int \frac{1}{(1-x)^2} dx$

b) (2p) $\int \sqrt{x} \ln x dx$.

5. **(2p)** Lös ekvationen $y'' - 3y' + 2y = e^{4x}$.

6. **(3p)** Låt $f(x) = x^3 e^{-x}$.

a) **(2p)** Bestäm eventuella stationära punkter och deras karaktär.

b) **(1p)** Undersök eventuella asymptoter till $f(x)$. Motivera svaret.

7. **(2p)** Lös ekvationen $4xy'y^3 = 1$, $y(1) = 2$.

8. **(2p)** Bestäm volymen av den kropp som uppstår då området som definieras av $0 \leq x \leq 1$ och $0 \leq y \leq x^2 - x^3$ (dvs området som begränsas av kurvan $y = x^2 - x^3$ och koordinataxlarna.) roterar kring x-axeln.

Lösningsförslag

1. **(2p)** Bestäm definitionsmängden för $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} + \tan x$.

Uttrycket $\tan x$ är definierad för $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ där $k \in \mathbb{Z}$.

Uttrycket $\sqrt{x^2 - 4}$ är definierad för $\sqrt{x^2 - 4} \geq 0 \Rightarrow x^2 - 4 \geq 0$. Vi vet att $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$. Undersöker $x^2 - 4 > 0$ med hjälp av teckentabell:

	$x < -2$	-2	$-2 < x < 2$	2	$x > 2$
$x^2 - 4$	+	0	-	0	+

Då $k = 0$ och $k = -1$ dvs $\frac{\pi}{2} (\approx 1,6)$ och $\frac{\pi}{2} + (-1) \cdot \pi = -\frac{\pi}{2}$ gäller att de ligger i intervallet $-2 < x < 2$ och inkluderas inte i svaret men för alla andra k -värden kommer funktionen att inte vara definierad.

Svar: Definitionsmängden är $x < -2$, $x > 2$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ där $k = 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

2. **(2p)** Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x - 1}{(x - \frac{\pi}{2})^2}$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x - 1}{(x - \frac{\pi}{2})^2} = \left[\begin{array}{c} \text{typ } \frac{0}{0} \\ l'H \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cos x}{2(x - \frac{\pi}{2})} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2(x - \frac{\pi}{2})} = \left[\begin{array}{c} \text{typ } \frac{0}{0} \\ l'H \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos 2x}{2} = -1.$$

Eller

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cos x}{2(x - \frac{\pi}{2})} = \left[\begin{array}{c} \text{typ } \frac{0}{0} \\ l'H \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos x \cos x + 2 \sin x (-\sin x)}{2} = \frac{2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} \right)^2 - 2 \left(\sin \frac{\pi}{2} \right)^2}{2} = -1$$

Svar: gränsvärdet är -1.

3. **(2p)** Beräkna $f''(1)$ om $f(x) = x - \arctan(2x)$.

$$f'(x) = 1 - \frac{1 \cdot 2}{1 + (2x)^2} = 1 - \frac{2}{1 + 4x^2} = 1 - 2(1 + 4x^2)^{-1}$$

$$f''(x) = -2 \cdot -1 \cdot (1 + 4x^2)^{-2} \cdot 8x = \frac{16x}{(1 + 4x^2)^2}$$

$$f''(1) = \frac{16 \cdot 1}{(1 + 4 \cdot 1^2)^2} = \frac{16}{25}$$

Svar: $f''(1) = \frac{16}{25}$

4. (3p) Bestäm

a) (1p) $\int \frac{1}{(1-x)^2} dx = \int (1-x)^{-2} dx = \frac{(1-x)^{-1}}{(-1) \cdot (-1)} + C = \frac{1}{1-x} + C$

b) (2p)

$$\int \sqrt{x} \ln x dx = \left[\begin{array}{ll} \text{partiell integration} & \\ f = \ln x & f' = \frac{1}{x} \\ \Rightarrow & \\ g' = \sqrt{x} = x^{1/2} & g = \frac{2x^{3/2}}{3} \end{array} \right] = \frac{2x^{3/2}}{3} \cdot \ln x - \int \frac{2x^{3/2}}{3} \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{2x^{3/2}}{3} \cdot \ln x - \int \frac{2x^{1/2}}{3} dx = \frac{2x^{3/2}}{3} \cdot \ln x - \frac{4x^{3/2}}{9} + C$$

5. (2p) Lös ekvationen $y'' - 3y' + 2y = e^{4x}$.

Börjar med att lösa den homogena differentialekvationen $y'' - 3y' + 2y = 0$. Lösningen till den karakteristiska ekvationen: $r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 1$ och $r_2 = 2$ ger den homogena lösningen $y_h = Ce^x + De^{2x}$.

Gör en ansats till den partikulära lösningen: $y_p = ae^{4x} \Rightarrow y_p' = 4ae^{4x} \Rightarrow y_p'' = 16ae^{4x}$.

Insättning i differentialekvationen ger: $16ae^{4x} - 3 \cdot 4ae^{4x} + 2ae^{4x} = e^{4x}$.

Likheten gäller om termerna i VL = termerna i HL: $16a - 12a + 2a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{6}$

Svar: Lösningen till DE är $y = Ce^x + De^{2x} + \frac{e^{4x}}{6}$

6. **(3p)** Låt $f(x) = x^3 e^{-x}$.

a) **(2p)** Bestäm eventuella stationära punkter och deras karaktär.

Undersöker om funktionen har max, min eller terrasspunkt genom att lösa ekvationen $f'(x) = 0$. $f(x) = x^3 e^{-x} \Rightarrow f'(x) = 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x}$

$3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x} = 0 \Rightarrow e^{-x} x^2 (3 - x) = 0$, $e^{-x} > 0$ för alla x . Lösningen till ekvationen är $x_1 = 0$ och $x_2 = 3$.

Undersöker karaktären på dessa punkter genom teckenstudium av första derivatan:

	$x < 0$	0	$0 < x < 3$	3	$x > 3$
e^{-x}	+	+	+	+	+
x^2	+	0	+	+	+
$3 - x$	+	-	+	0	-
$f'(x) = 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x}$	+	0	+	0	-

Svar: $x = 0$ är en växande terrasspunkt och $x = 3$ en maxpunkt.

b) **(1p)** Undersök eventuella asymptoter till $f(x)$. Motivera svaret.

Saknas vertikala asymptoter då $f(x)$ är definierad för alla x .

Undersöker horisontell asymptot:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^{-x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x} = \left[\begin{array}{c} \text{typen } \frac{\infty}{\infty} \\ \text{IH} \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{e^x} = \left[\begin{array}{c} \text{typen } \frac{\infty}{\infty} \\ \text{IH} \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{e^x} = \left[\begin{array}{c} \text{typen } \frac{\infty}{\infty} \\ \text{IH} \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{e^x} = 0$$

Svar: $y = 0$ är en asymptot till $f(x)$.

7. **(2p)** Lös ekvationen $4xy'y^3 = 1$, $y(1) = 2$.

Separabel differentialekvation, börjar med att separera variablerna därefter integrerar båda leden:

$$4xy'y^3 = 1 \Rightarrow 4xy^3 \frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow 4y^3 dy = \frac{1}{x} dx$$

$$\int 4y^3 dy = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow y^4 = \ln|x| + C \Rightarrow y = (\ln x + C)^{\frac{1}{4}}$$

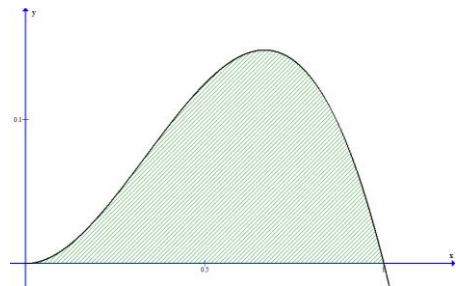
Bestämmer konstanten C med hjälp villkoret $y(1) = 2$:

$$y(1) = (\ln 1 + C)^{\frac{1}{4}} = 2 \Rightarrow C = 2^4 = 16$$

Svar: $y = \sqrt[4]{\ln x + 16}$

8. **(2p)** Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området som definieras av $0 \leq x \leq 1$ och $0 \leq y \leq x^2 - x^3$ (dvs området som begränsas av kurvan $y = x^2 - x^3$ och koordinataxlarna) roterar kring x-axeln.

Figuren visar området som ska roteras kring x-axeln. Skivmetoden för beräkning av volymen:



$$\pi \int_0^1 (x^2 - x^3)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^4 - 2x^5 + x^6) dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{7} - 0 \right) = \pi \left(\frac{21 - 35 + 15}{105} \right) = \frac{\pi}{105}$$

Svar: Volymen blir $\frac{\pi}{105}$.