

Övre betygsdel

Exempel hämtade från gamla tentor, inom parentes angivet vilken där ni kan hitta lösningarna.

1. Lös följande differentialekvation

$$y' + \frac{1}{x}y = 5x^3, \quad y(1) = 2. \quad (\text{TEN2 14 jan 2021})$$

2. Låt $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{x} & x < 0 \\ x \ln x & x > 0 \end{cases}$.

- Bestäm funktionens definitionsmängd.
- Bestäm funktionens stationära punkter och deras karaktär.
- Bestäm eventuella asymptoter till $f(x)$.
- Rita funktionens graf. (TEN2 15 april 2019)

3. a) Bestäm alla lösningar (även eventuella singulära lösningar) till följande differentialekvation

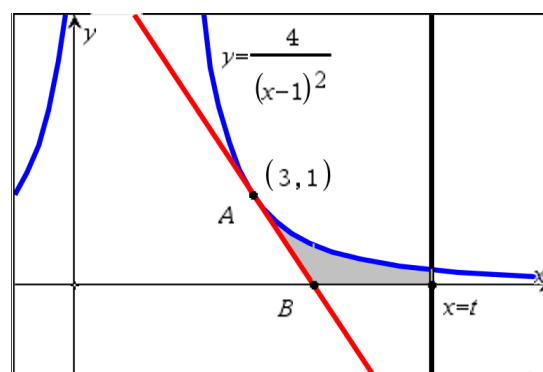
$$\frac{dy}{dx} = x^3 \sqrt{4 - y^2}.$$

b) Ange lösningar på explicitform. (TEN2 9 april 2021)

4. Linjen genom punkterna A och B är tangent till kurvan $y = \frac{4}{(x-1)^2}$. Punkten A

har koordinaterna (3, 1). Kurvan, tangenten, x-axeln och linjen $x = t$ begränsar ett område, se figur. Beräkna arean av det skuggade området då t växer obegränsat.

(Lösning i slutet av dokumentet)



5. Använd substitution $z(x) = \arctan(y(x))$ för att lösa följande differentialekvation

$$y'(x) + 3\arctan(y(x)) \cdot (1 + y^2(x)) = 9 \cdot (1 + y^2(x)). \quad (\text{TEN2 9 jan 2017})$$

Lösning uppgift 4.

$$y = \frac{4}{(x-1)^2} = 4(x-1)^{-2} \text{ och } A(3,1)$$

Börjar med att bestämma tangentens ekvation, dvs linjen genom A och B:

Använder enpunktsformeln: $y - y_1 = f'(3)(x - x_1)$ där $x_1 = 3, y_1 = 1$

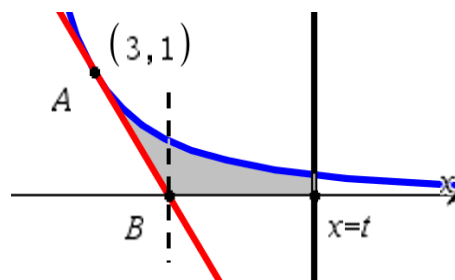
$$f'(x) = -8(x-1)^{-3} = \frac{-8}{(x-1)^3} \quad \text{ger} \quad f'(3) = \frac{-8}{(3-1)^3} = -1$$

Insättning i enpunktsformeln ger: $y - 1 = -1(x - 3) \Leftrightarrow y = -x + 3 + 1 = -x + 4$

Punkten B:s koordinater fås genom att bestämma tangentens skärning med x-axeln:

$$0 = -x + 4 \Leftrightarrow x = 4 \quad B(4, 0)$$

Det skuggade området delas upp i två delar: område 1, $3 \leq x \leq 4$, begränsas av kurvan och tangenten. Område 2, $4 \leq x \leq t$, begränsas av kurvan och x-axeln.



$$\text{Totala area: } \int_3^4 (4(x-1)^{-2} - (-x+4)) dx + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_4^t 4(x-1)^{-2} dx$$

$$\begin{aligned} \text{Område 1: } \int_3^4 \left(\frac{4}{(x-1)^2} - (-x+4) \right) dx &= \int_3^4 \left(\frac{4}{(x-1)^2} + x - 4 \right) dx = \\ &= \left[\frac{-4}{x-1} + \frac{x^2}{2} - 4x \right]_3^4 = \frac{-4}{4-1} + \frac{4^2}{2} - 4 \cdot 4 - \left(\frac{-4}{3-1} + \frac{3^2}{2} - 4 \cdot 3 \right) = \\ &= \frac{-4}{3} - 8 + 2 - \frac{9}{2} + 12 = 6 - \frac{4}{3} - \frac{9}{2} = \frac{36-8-27}{6} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\text{Område 2: } \lim_{t \rightarrow \infty} \int_4^t \frac{4}{(x-1)^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{-4}{x-1} \right]_4^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{-4}{t-1} - \frac{-4}{4-1} \right) = \frac{4}{3}$$

$$\text{Totala area blir då } \frac{1}{6} + \frac{4}{3} = \frac{1+4 \cdot 2}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \text{ ae}$$

Svar: totala arean är $\frac{3}{2}$ ae.