

**Exempeltenta Analys** (Omgjord omtenta som gick den 21 april 2022)

**Del I**

1. **(2p)** Bestäm definitionsmängden till funktionen  $f(x) = \frac{\ln(1-5x)}{x^2-4}$ .

2. a) **(1p)** Om  $g(x) = \frac{\ln(x-1)}{2}$  bestäm inversen  $g^{-1}(x)$ .

b) **(1p)** Bestäm gränsvärdet  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{e^{2x}-1}$ .

3. **(2p)** Beräkna  $f''(5)$  då  $f(x) = x^2 \cdot \ln 3x$ .

4. **(2p)** Vid urladdning av en kondensator med kapacitansen  $C$  över en resistor med resistansen  $R$  gäller för kondensatorns spänning  $u$  vid tiden  $t$  att

$$u = -RC \frac{du}{dt}.$$

a) (1p) Lös differentialekvationen, om  $u(0) = E$ .

b) (1p) Bestäm hur lång tid det tar tills kondensatorspänningen har gått ner till hälften av  $E$ .

5. **(2p)** Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan  $f(x) = \frac{x^3}{x^2-2}$  i punkten  $x=1$ .

6. **(2p)** Bestäm med lämpligt variabelbyte  $\int \frac{1}{x} \sin(2 + \ln x) dx$ .

## Del II

7. (3p) Låt  $f(x) = \begin{cases} -4xe^{2x} & x < 0 \\ \frac{x^2}{x-2} & 0 \leq x < 2 \end{cases}$ . Funktionen  $f(x)$  är kontinuerlig i punkten

$x = 0$ .

a) (1p) Bestäm  $f'(x)$ .

b) (1p) Undersök om funktionen  $f(x)$  är deriverbar i  $x = 0$ .

b) (1p) Bestäm funktionens stationära punkter och deras karaktär. (Från TEN2 8 jan 2019 men omgjord)

8. (3p) Lös ekvationen  $y'' + 4y' = x + 1$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .

9. (3p) Beräkna volymen av den rotations kropp som uppkommer då ytan mellan kurvan  $y = xe^x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , och x-axeln roterar ett varv kring x-axeln.

10. (3p) Lös differentialekvationen  $xy' = y^2 - 2y$ ,  $y(1) = 1$ ,  $x \geq 0$  dvs bestäm  $y(x)$ .

11. (2p) Bestäm  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^{x^4} - 1}}{x^2}$ .

Tips: Taylors formel kring punkten  $a$  är

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R$$

där  $R = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$  och  $c$  är ett tal som ligger mellan  $a$  och  $x$ .

## Lösningsföreläsning

1. (2p)  $\ln(1-5x)$  är definierad för  $1-5x > 0$ , dvs  $x < \frac{1}{5}$ .

Kvoten är inte definierad då  $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$ .

Svar: Definitionsmängden för  $f(x)$  är  $(-\infty, -2) \cup (-2, \frac{1}{5})$ .

**Rättningsmall:**

Definitionsmängd för täljare och nämnare rätt men fel för  $f(x)$ , 1p.

Allt korrekt, 2p.

2. a) (1p) Löser ut  $x$  ur funktionen  $g(x)$ :

$$g(x) = \frac{\ln(x-1)}{2} \Leftrightarrow 2y = \ln(x-1) \Rightarrow e^{2y} = e^{\ln(x-1)} \Leftrightarrow e^{2y} = x-1 \Leftrightarrow x = 1 + e^{2y}.$$

Svar:  $g^{-1}(x) = 1 + e^{2x}$ .

$$\text{b) (1p)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{e^{2x} - 1} = \left[ \begin{array}{c} \text{typ} \\ l'H \end{array} \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2e^{2x}} = \frac{1}{4}.$$

Svar: gränsvärdet är  $\frac{1}{4}$ .

**Rättningsmall:**

a) Korrekt funktion, 1p.

b) Korrekt deriverat samt korrekt svar, 1p.

3. (2p) Derivera två gånger och sätt därefter in det aktuella  $x$  - värdet:

Produktregeln och kedjeregeln ger,  $f'(x) = 2x \cdot \ln 3x + x^2 \cdot \frac{1}{3x} \cdot 3 = 2x \cdot \ln 3x + x$

$$f''(x) = 2 \cdot \ln 3x + 2x \cdot \frac{1}{3x} \cdot 3 + 1 = 2 \cdot \ln 3x + 3$$

$$f''(5) = 2 \cdot \ln(3 \cdot 5) + 3 = 2 \cdot \ln 15 + 3$$

Svar:  $f''(5) = 2 \cdot \ln 15 + 3$

**Rättningsmall:** Korrekt andraderivata ger 1p. Allt korrekt ger 2p.

Alla tillräckligt förenklade omskrivningar av svaret med loglagar ger full poäng:

t.ex:  $\ln 15^2 + 3 = \ln 225 + 3 = \ln(15^2 e^3) = 2 \ln 3 + 2 \ln 5 + 3$  m.m.

4. a) (1p) Linjär differentialekvation av första ordningen,  $u = -RC \frac{du}{dt} \Leftrightarrow \frac{du}{dt} + \frac{1}{RC}u = 0$  med den allmänna lösningen  $u(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}$ . Villkoret  $u(0) = E$  ger  $u(0) = Ae^{-\frac{0}{RC}} = E \Leftrightarrow A = E$ .

**Svar:**  $u(t) = Ee^{-\frac{t}{RC}}$ .

b) (1p) Vad är  $t$  då  $u = \frac{E}{2}$ ?

$$\frac{E}{2} = Ee^{-\frac{t}{RC}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow \ln \frac{1}{2} = \ln e^{-\frac{t}{RC}} \Leftrightarrow \ln 1 - \ln 2 = -\frac{t}{RC}$$

$$-\ln 2 = -\frac{t}{RC} \Leftrightarrow t = RC \ln 2$$

**Svar:**  $t = RC \ln 2$ .

**Rättningsmall:**

a) Korrekt ekvation  $u(t) = Ee^{-\frac{t}{RC}}$ , 1p.

b) Korrekt svar, 1p.

5. a) (2p) Derivera med kvotregeln:  $f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x^2 - 2) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 2)^2} = \frac{x^4 - 6x^2}{(x^2 - 2)^2}$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^4 - 6x^2 = x^2 \cdot (x^2 - 6) = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = -\sqrt{6}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{6}$$

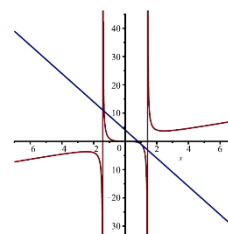
(Ingen av dessa lösningar gör nämnaren till noll)

b) (1p)  $x=1 \Rightarrow y = f(1) = \frac{1^3}{1^2 - 2} = -1$

$$k = f'(1) = \frac{1^4 - 6 \cdot 1^2}{(1^2 - 2)^2} = -5$$

Ekvationen för en rät linje:  $y = kx + m$ , där punkten  $(1, -1)$  och  $k = -5$  insättes:

$$-1 = (-5) \cdot 1 + m \Rightarrow m = 4 \quad \text{d.v.s.} \quad y = -5x + 4$$



Figuren visar kurvan, tangenten samt vertikala asymptoter.

**Svar:** a)  $x_1 = -\sqrt{6}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{6}$

b)  $y = -5x + 4$

**Rättningsmall:**

a) korrekt derivering ger 1p, allt rätt ger 2p.

b) allt rätt ger 1p.

$$6. \text{ (2p) } \int \frac{1}{x} \sin(2 + \ln x) dx = \left[ \begin{array}{l} t = 2 + \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array} \right] = \int \sin t dt = -\cos t + C = -\cos(2 + \ln x) + C.$$

Svar:  $-\cos(2 + \ln x) + C$

### Rättningsmall:

Tydlig redovisning av variabelbyte och korrekt integration  $-\cos t$ , 1p

eller

Tydlig redovisning av variabelbyte och korrekt integration  $-\cos t + C$ , 1p

eller

Tydlig redovisning av variabelbyte och korrekt integration,  $-\cos(2 + \ln x)$ , 1p.

eller

Tydlig redovisning av variabelbyte, korrekt integration och svar,  $-\cos(2 + \ln x) + C$ , 2p

7. Genom att derivera enligt deriveringsregler (i de inre punkterna av de två definitionsintervallen) får vi

$$a) f'(x) = \begin{cases} -4e^{2x} - 8xe^{2x} & x < 0 \\ \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} & 0 < x < 2 \end{cases}$$

b) undersöka  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$  och  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ .

Vi har

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} -4e^{2x}(1+2x) = -4 \cdot 1(1+0) = -4 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = \frac{0}{4} = 0 \end{array} \right\}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ . Med andra ord är vänster och högerderivatan olika, som medför att  $f(x)$  **inte** är deriverbar i punkten  $x = 0$ .

**Svar b.**  $f(x)$  **inte** deriverbar i punkten  $x = 0$ .

c) Stationära punkter till  $f(x)$  är lösningar till ekvationen  $f'(x) = 0$ .

Eventuella stationära punkter för  $x < 0$ :

För  $x < 0$  gäller:  $-4e^{2x} - 8xe^{2x} = 0 \Rightarrow -4e^{2x}(1+2x) = 0 \Rightarrow 1+2x = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}$  (som uppfyller kravet  $x < 0$ ). Därmed är  $x_1 = -\frac{1}{2}$  en stationär punkt.

Teckentabell för  $f'(x)$ :

| x-värden | $x < -\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2} < x$ |
|----------|--------------------|----------------|--------------------|
| $f'(x)$  | +                  | 0              | -                  |

visar att  $x = -\frac{1}{2}$  är en maxpunkt.

Eventuella stationära punkter för  $0 < x < 2$ :

$$\frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow \frac{x^2-4x}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x(x-4)=0 \Rightarrow x_2=0, x_3=4.$$

Punkten  $x_3=4$  ligger utanför intervallet  $0 < x < 2$  och ska därför förkastas i den här delen. Punkten  $x_2=0$  är **inte** en stationär punkt eftersom  $f(x)$  inte är deriverbar i denna punkt (a-uppgiften).

**Svar c:** Det finns en stationär punkt:  $x = -\frac{1}{2}$  (som är en maxpunkt).

**Rätningsmall: 1p för varje del.**

8. **(3p)**  $y'' + 4y' = x + 1$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$  är en andra ordningens, inhomogen d.e. med konstanta koefficienter.

Karakteristisk ekvation:  $r^2 + 4r = r \cdot (r + 4) = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = -4$

Homogen lösning:  $y_h(x) = Ae^{0 \cdot x} + Be^{-4x} = A + Be^{-4x}$

För den inhomogena lösningen görs en ansats (vi måste ansätta en andragsgradsfunktion eftersom  $y$  inte finns i ekvationen):  $y_p = ax^2 + bx + c \Rightarrow y'_p = 2ax + b, y''_p = 2a$

Insättning i ekvationen ger:

$$2a + 4 \cdot (2ax + b) = x + 1$$

$$8ax + (2a + 4b) = x + 1$$

$$\begin{cases} 8a = 1 \\ 2a + 4b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{8} \\ b = \frac{3}{16} \end{cases}$$

$$y_p = \frac{1}{8} \cdot x^2 + \frac{3}{16} \cdot x + c$$

Konstanttermen,  $c$ , i  $y_p$  är godtycklig, men slås ihop med den konstanta termen,  $A$ , i  $y_h$ :

$$\text{Allmän lösning: } y = y_h + y_p = A + Be^{-4x} + \frac{1}{8} \cdot x^2 + \frac{3}{16} \cdot x$$

$$\text{Tillämpa villkor: } y(0) = A + Be^{-4 \cdot 0} + \frac{1}{8} \cdot 0^2 + \frac{3}{16} \cdot 0 = A + B = 1$$

$$y'(x) = -4Be^{-4x} + \frac{1}{4}x + \frac{3}{16} \Rightarrow y'(0) = -4Be^{-4 \cdot 0} + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{3}{16} = -4B + \frac{3}{16} = 0$$

$$\text{Ekv 2 ger: } B = \frac{3}{64}, \text{ och ekv 1 ger då att } A = 1 - B = 1 - \frac{3}{64} = \frac{61}{64}$$

Sökt partikulärlösning:  $y = \frac{61}{64} + \frac{3}{64} \cdot e^{-4x} + \frac{1}{8} \cdot x^2 + \frac{3}{16} \cdot x$

**Svar:**  $y = \frac{61}{64} + \frac{3}{64} \cdot e^{-4x} + \frac{1}{8} \cdot x^2 + \frac{3}{16} \cdot x$

**Rättningsmall:** Korrekt lösning till den homogena ekvationen ger 1p

Korrekt partikulärlösning till den inhomogena ekvationen ger 1p

Allt rätt ger totalt 3 poäng.

9. (3p) volymen av den rotations kropp som uppkommer då ytan mellan kurvan  $y = xe^x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , och x-axeln roterar ett varv kring x-axeln.

Använder skivmetoden:

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^1 (f(x))^2 dx = \pi \int_0^1 (xe^x)^2 dx = \pi \int_0^1 x^2 e^{2x} dx = \left[ \begin{array}{l} \text{partiell integration} \\ v = x^2 \quad v' = 2x \\ u' = e^{2x} \quad u = \frac{e^{2x}}{2} \end{array} \Rightarrow \right] = \pi \left( \frac{e^{2x}}{2} \cdot x^2 - \int_0^1 2x \frac{e^{2x}}{2} dx \right) = \\
 &= \pi \left( \left[ \frac{e^{2x}}{2} \cdot x^2 \right]_0^1 - \int_0^1 x e^{2x} dx \right) = \left[ \begin{array}{l} \text{partiell integration} \\ v = x \quad v' = 1 \\ u' = e^{2x} \quad u = \frac{e^{2x}}{2} \end{array} \Rightarrow \right] = \pi \left( \left[ \frac{e^{2x}}{2} \cdot x^2 \right]_0^1 - \left( \left[ \frac{e^{2x}}{2} \cdot x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2} dx \right) \right) = \\
 &= \pi \left( \left[ \frac{e^{2x}}{2} \cdot x^2 - \frac{e^{2x}}{2} \cdot x \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2} dx \right) = \pi \left[ \frac{e^{2x}}{2} \cdot x^2 - \frac{e^{2x}}{2} \cdot x + \frac{e^{2x}}{4} \right]_0^1 = \pi \left( \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{4} (e^2 - 1)
 \end{aligned}$$

Svar: volymen är  $\frac{\pi}{4} (e^2 - 1)$ .

**Rättningsmall:**

Rätt uppställd integral och första partiella integrationen korrekt (utan integrationsgränser ok), 1p

Rätt uppställd integral och korrekt bestämd primitiv funktion (utan integrationsgränser ok), dvs

$$\left[ \frac{e^{2x}}{2} \cdot x^2 - \frac{e^{2x}}{2} \cdot x + \frac{e^{2x}}{4} \right]_0^1, 2p$$

Allt korrekt, 3p

10. (3p)  $x \cdot \frac{dy}{dx} = y^2 - 2y \Rightarrow \frac{dy}{y^2 - 2y} = \frac{dx}{x}$

Vid denna omskrivning särbehandlas  $y=2$  och  $y=0$ .

Integrera i båda led:  $\int \frac{dy}{y^2 - 2y} = \int \frac{dx}{x}$

Bestäm leden var för sig (utan konstant), först höger led:  $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| = \ln x$ , eftersom  $x > 0$

Vänster led:  $\int \frac{dy}{y^2 - 2y} = \int \frac{dy}{y \cdot (y - 2)}$

Partialbråksuppdelning med ansats:  $\frac{1}{y \cdot (y - 2)} = \frac{a}{y} + \frac{b}{y - 2} = \frac{a \cdot (y - 2) + by}{y \cdot (y - 2)} = \frac{(a + b) \cdot y - 2a}{y \cdot (y - 2)}$

Vilket ger:  $\begin{cases} a + b = 0 \\ -2a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -a = \frac{1}{2} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$\int \frac{dy}{y \cdot (y - 2)} = \int \left( -\frac{1}{2y} + \frac{1}{2 \cdot (y - 2)} \right) dy = -\frac{1}{2} \cdot \ln|y| + \frac{1}{2} \cdot \ln|y - 2| = \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{y - 2}{y} \right|$

Sätt nu in i likheten och ta med en integrationskonstant:

$\int \frac{dy}{y^2 - 2y} = \int \frac{dx}{x}$  ger  $\frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{y - 2}{y} \right| = \ln x + C$  eller  $\ln \left| \frac{y - 2}{y} \right| = 2 \ln x + 2C$

$\left| \frac{y - 2}{y} \right| = e^{2 \ln x + 2C} = e^{2C} \cdot e^{\ln x^2} \Rightarrow \frac{y - 2}{y} = \pm e^{2C} \cdot e^{\ln x^2}$

Betecknar  $\pm e^{2C} = D$  vilket ger  $\frac{y - 2}{y} = Dx^2 \Leftrightarrow y - 2 = Dx^2 y \Leftrightarrow y - Dx^2 y = 2 \Leftrightarrow y(1 - Dx^2) = 2$   
 $y = \frac{2}{1 - Dx^2}$

$y=2$  ingår i den allmänna lösningen dvs det finns ett  $D$  som ger den konstanta lösningen  $y=2$  men inte för  $y=0$ .  $y=0$  uppfyller inte villkoret  $y(1)=1$  och är därför inte en del av lösningen.

Villkoret  $y(1)=1$  ger:  $\frac{2}{1 - D \cdot 1^2} = 1 \Rightarrow 2 = 1 - D \Rightarrow D = -1$

$y = \frac{2}{1 - (-1)x^2} = \frac{2}{1 + x^2}$  Svar:  $y = \frac{2}{1 + x^2}$

**Rättningsmall:** Korrekt utförd partialbråksuppdelning,  $-\frac{1}{2y} + \frac{1}{2 \cdot (y - 2)}$ , 1p

Korrekt allmän lösning på implicit form tex  $\ln \left| \frac{y - 2}{y} \right| = 2 \ln x + 2C$ , 2p

Allt korrekt, 3p

Bestämmer  $D$  från implicitekvation,  $\left| \frac{1 - 2}{1} \right| = D \cdot 1^2$ , ok

Vid rättningen inget avdrag om man inte resonerar kring specialfallen  $y=2$  och  $y=0$ .

11. (2p)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^{x^4} - 1}}{x^2}$

L'Hospitals regel fungerar inte här. Behöver förenkla uttrycket vilket kan göras med en polynomapproximation kring  $a=0$  eftersom  $x$  går mot 0.

$$\frac{\sqrt{e^{x^4} - 1}}{x^2} = \sqrt{\frac{e^{x^4} - 1}{x^4}} \quad \text{Då nämnaren är ett polynom av grad 4 bestäms ett Maclaurinpolynom av ordning 4.}$$

Högre ordning är inte nödvändig då varje term kommer att innehålla  $x$  vilket innebär att när  $x$  går mot 0 att dessa termer blir noll.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$\begin{aligned} y &= e^{x^4} & y(0) &= 1 \\ y' &= 4x^3 e^{x^4} & y'(0) &= 0 \\ y'' &= 12x^2 e^{x^4} + 4x^3 \cdot 4x^3 e^{x^4} = e^{x^4} (12x^2 + 16x^6) & \Rightarrow y''(0) &= 0 \\ y''' &= 4x^3 e^{x^4} (12x^2 + 16x^6) + e^{x^4} (24x + 96x^5) & y'''(0) &= 0 \\ y^{(4)} &= \dots + 4x^3 e^{x^4} (24x + 96x^5) + e^{x^4} (24 + 96 \cdot 5x^4) & y^{(4)}(0) &= 24 \end{aligned}$$

I tredjederivatan är den första produkten ointressant då denna blir noll för  $x=0$  därför endast nödvändigt att derivera den andra produkten.

Maclaurinpolynom av ordning 4:  $f(x) = 1 + \frac{24}{4!}x^4 = 1 + x^4$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{e^{x^4} - 1}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1 + x^4 - 1}{x^4}} = \sqrt{\frac{x^4}{x^4}} = 1$$

**Svar:** Gränsvärdet är 1.

### Rättningsmall:

Bestämmer  $1 + x^4$  med några små deriveringsfel men det framgår att det är ett polynom av grad 4), 1p  
Korrekt svar med rätt lösningsmetod, 2p