Inlämning **fredag 2 dec**. Slå ihop alla (uppgift 1-4) till en scriptfil och spara filen. Kolla först att filen funkar som den ska och att alla uppgifter redovisas efter körningen innan den laddas upp i canvas i mappen MatLab inlämning 2.2.

Gränsvärden och derivator

Algebra

Symboliska uttryck kan förenklas och skrivas på olika sätt. Detta kan göras i MATLAB med följande kommandon:

expand(s)	skriver uttrycket s som en summa av termer.
collect(s,v)	skriver ihop uttrycket s i termer av potenser av *v*.
factor(s)	faktoriserar uttrycket s.
simplify(s,opt)	förenklar uttrycket s.

Exempel 1: Betrakta uttrycket $f = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

a) Faktorisera *f*.

b) Förenkla uttrycket $k = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x - 1}$ där täljaren är uttrycket *f*.

```
syms x
format compact         %tar bort alla blank rader.
f=x^3-2*x^2-5*x+6;     %definierar uttrycket f.
h=factor(f)            %faktoriserar f, dvs delar upp uttrycket f i faktorer.
k=f/(x-1)              %definierar ett nytt uttryck k.
l=simplify(k)          %förenklar uttrycket k.
```

```
h =
[x - 1, x - 3, x + 2]
k =
-(- x^3 + 2*x^2 + 5*x - 6)/(x - 1)
l =
x^2 - x - 6
```

Det går även bra att förenkla rationella uttryck som innehåller tex sinus, logaritm mm.

Förenklar uttrycket $\dfrac{\sin^3 x + \sin^2 x - \sin x - 1}{\sin x + 1}$ i MATLAB:

```
>> syms x
>> simplify((sin(x)^3+sin(x)^2-sin(x)-1)/(sin(x)+1))
ans =
sin(x)^2 - 1
```

Exempel 2: Betrakta uttrycket $g = \left(2x + \frac{3}{x}\right)^3$.

a) Förenkla uttrycket. b) Skriv uttrycket i termer av variabeln x.

I MATLAB:

```
syms x
g=(2*x+3/x)^3;  %definierar uttrycket g.
r=expand(g)             %utför multiplikationen och skriver ut alla termer.
p=collect(g)            %skriver om uttrycket i termer av x^n där n är positiva heltal.
pretty(p)               %ger en utskrift i en mer lättläslig form.
```

```
r =
36*x + 54/x + 27/x^3 + 8*x^3
p =
(8*x^6 + 36*x^4 + 54*x^2 + 27)/x^3
   6       4       2
8 x  + 36 x  + 54 x  + 27
-------------------------
             3
            x
```

Gränsvärden

I MATLAB beräknas gränsvärden med kommandot limit.

limit(f,x,a)	bestämmer gränsvärdet av uttrycket *f* då $x \to a$.
limit(f,x,a,'right')	bestämmer gränsvärdet av uttrycket *f* då $x \to a^+$.
limit(f,x,a,'left')	bestämmer gränsvärdet av uttrycket *f* då $x \to a^-$.

Exempel 3: Beräkna gränsvärdena a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{6-5x}}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$ b) $\lim_{t \to -\infty} \frac{5e^{2at} - 5}{2}$ där $a > 0$

Gränsvärdena beräknas i MATLAB genom:

a-uppgift

```
syms x                   %definierar symboliska x-variabeln.
f=sqrt(6-5*x)/sin(x+pi/2); %definierar uttrycket.
flim=limit(f,x,0)        %beräknar gränsvärdet, ger exakt svar.
double(flim)             %anger svaret som närmevärde med.
```

```
flim =
6^(1/2)
ans =
    2.4495
```

b-uppgift

```
syms t                   %definierar varieblen t.
syms a positive          %definerar variabeln a och att a>0.
f=5*(exp(2*a*t)-1)/2;    %definierar uttrycket.
flim=limit(f,t,-inf)     %beräknar gränsvärdet då t går mot -oändligheten.
```

```
flim =
-5/2
```

Exempel 4: Funktionen $f(x)=\sin x\cdot(x-1)\sqrt{1+\frac{1}{(x-1)^2}}$ har definitionsmängden $x\neq 1$, dvs definierad för alla x utom x=1. Funktionen saknar gränsvärde då $x\to 1$

```
syms x
format compact
f=sin(x)*(x-1)*sqrt(1+1/(x-1)^2);
flim=limit(f,x,1)
```

```
flim =
NaN
```

men har både höger- och vänster gränsvärden.

```
syms x
format compact
f=sin(x)*(x-1)*sqrt(1+1/(x-1)^2);
flimHoger=limit(f,x,1,'right')
flimVanster=limit(f,x,1,'left')
```

```
flimHoger =
sin(1)
flimVanster =
-sin(1)
```

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\sin 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\sin 1$$

Använd kommandot double för att ange svaret i decimal form. Funktionen är diskontinuerlig i punkten x=1 eftersom $\lim_{x\to 1^+} f(x)\neq \lim_{x\to 1-} f(x)$.

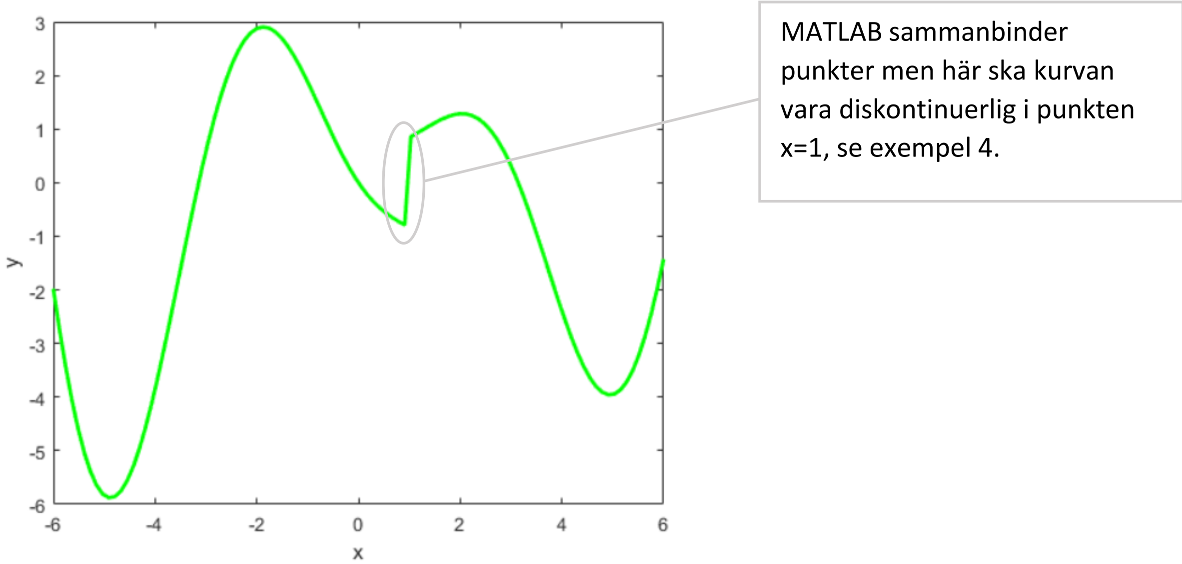
I följande exempel används substitutionskommandot subs för att omvandla ett symboliskt uttryck till en numerisk form, vilken sedan kan användas till att skapa en graf.

Exempel 5: Rita funktionen $f(x)=\sin x\cdot(x-1)\sqrt{1+\frac{1}{(x-1)^2}}$.

I MATLAB:

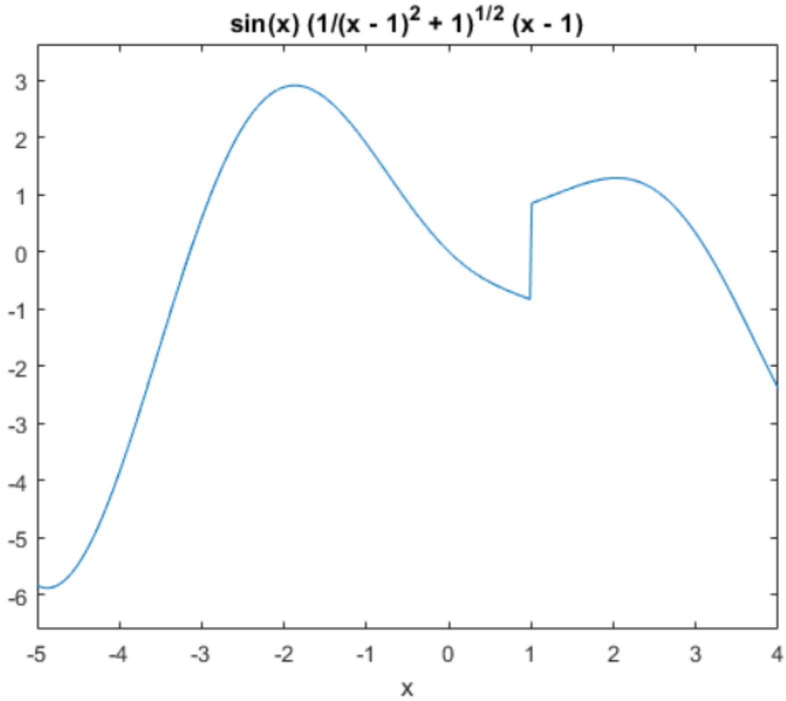
```
syms x
format compact
f=sin(x)*(x-1)*sqrt(1+1/(x-1)^2);
xvarden=linspace(-6,6);          %genererar 100 x-värden mellan -6 till 6.
yvarden=subs(f,x,xvarden);       %genererar tilhörande y-värden.
plot(xvarden,yvarden,'g','LineWidth',2)  %ritar en grön kurva med linjebredden 2.
xlabel('x'),ylabel('y')          %text på axlarna.
```

Figuren visas på nästa sida.



Man kan istället använda kommandot ezplot(f,[Xmin,Xmax]) för att enkelt rita symboliska uttryck. Kurvor ritas i intervallet $-2\pi \le x \le 2\pi$ om Xmin och Xmax inte anges. Med ezplot kan man inte välja linjebredd, linje typ eller färg men skriver in text till x-axeln samt rubrik.

```
syms x
f=sin(x)*(x-1)*sqrt(1+1/(x-1)^2);
ezplot(f,[-5,4]);
```



Derivator

Kommandon som kommer att användas i MATLAB:

diff(f,x)	deriverar f med avseende på variabeln x.
diff(f,x,n)	deriverar f med avseende på x n gånger.
taylor(f,x,a,n)	ger Taylorpolynomet av ordningen n-1 till *f* kring en punkt x=a.

Exempel 6: Låt $f(x)=\dfrac{e^{x-3}}{2x+1}$. Bestäm a) $f'(x)$ b) $f''(x)$ c) beräkna $f''(2)$.

```
syms x
f=exp(x-3)/(2*x+1);
% a
df=diff(f)              %deriverar med avseende på x.
pretty(df)              %omvandlar till en lättläslig form.
% b
d2f=diff(f,x,2)         %deriverar två gånger med avseende på x.
D=simplify(d2f)          %förenklar uttrycket.
pretty(D)               %lättläslig form.
% c
ExaktSvar=subs(d2f,x,2) % Ger exakt svar då vi definierat symbolisk x-variabel.
NumSvar=double(ExaktSvar)  %omvandling till ett numeriskt värde av f''(2) används double.
```

```
df =
exp(x - 3)/(2*x + 1) - (2*exp(x - 3))/(2*x + 1)^2
exp(x - 3)   2 exp(x - 3)
---------- - ------------
  2 x + 1             2
              (2 x + 1)

d2f =
exp(x - 3)/(2*x + 1) - (4*exp(x - 3))/(2*x + 1)^2 + (8*exp(x - 3))/(2*x + 1)^3
D =
(exp(x - 3)*(4*x^2 - 4*x + 5))/(2*x + 1)^3
               2
exp(x - 3) (4 x  - 4 x + 5)
---------------------------
                  3
         (2 x + 1)

ExaktSvar =
(13*exp(-1))/125
NumSvar =
    0.0383
```

c-uppgiften kan bestämmas utan att använda kommandot subs, definierar istället den symboliska variabeln f(x).

```
syms f(x)
f(x)=exp(x-3)/(2*x+1);
df(x)=diff(f(x));                %deriverar med f(x) avseende på x.
d2f(x)=diff(f(x),x,2);           %deriverar två gånger med avseende på x.
ExaktSvar=d2f(2)                %Ger exakt svar då vi definierat symbolisk f(x)-variabel.
NumSvar=double(ExaktSvar)       %omvandling till ett numeriskt värde av f''(2) används double.
```

```
ExaktSvar =

(13*exp(-1))/125


NumSvar =

    0.0383
```

I nästa exempel tillämpas Taylor formeln:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R$$

där $R = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ och c är ett tal som ligger mellan a och x.

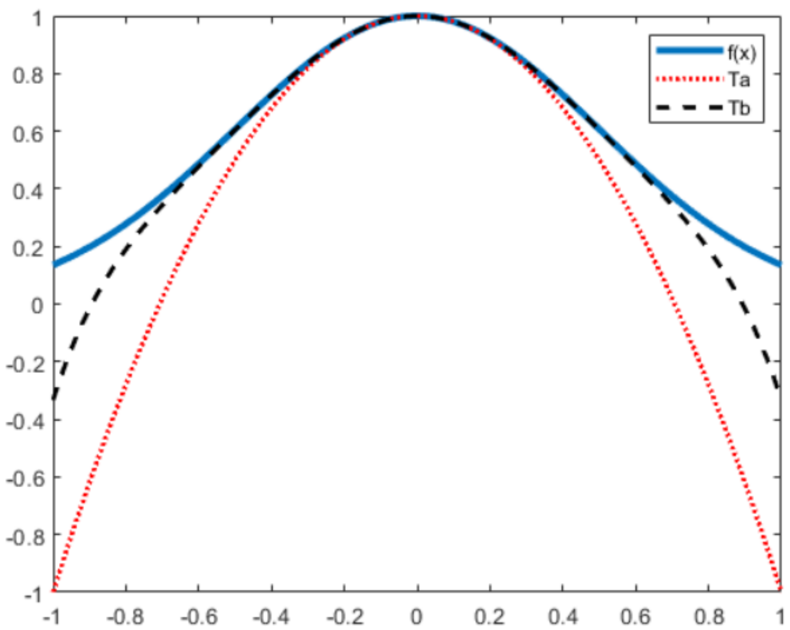
Exempel 7: funktionen $f(x) = e^{-2x^2}$.

a) Bestäm Taylorpolynomet av ordning 3 kring punkten x=0.
b) Bestäm Taylorpolynomet av ordning 7 kring punkten x=0.
c) Rita kurvan till funktionen f och båda Taylorpolynomen i samma grafikfönster.
d) Hur stort kan felet bli maximalt när man uppskattar $f(0{,}1)$ med Taylorpolynomet av ordning 3?

I MATLAB:

```
clf
clear
syms x
f=exp(-2*x^2)
% a
Ta=taylor(f,x,0,'order',4)      % order 3 innebär här att n-1=3 dvs n=3+1=4.

% b
Tb=taylor(f,x,0,'order',8)      % order 7 innebär att n-1=7 dvs n=8.
pretty(Tb)

% c
xv=linspace(-1,1);         %genererar 100 st x-värden.
yv=subs(f,x,xv);           %beräknar 100 st y-värden med hjälp av funktion f(x).
yv2=subs(Ta,x,xv);         %beräknar 100 st y-värden med hjälp av polynomet Ta(x).
yv3=subs(Tb,x,xv);         %beräknar 100 st y-värden med hjälp av polynomet Tb(x).
plot(xv,yv,'Linewidth',3)    %plottar kurvan f
hold on                    %kvarhållning
plot(xv,yv2,'r:','LineWidth',2) %plottar kurvan Ta i samma grafikfönster som f
plot(xv,yv3,'k--','LineWidth',2) %plottar kurvan Tb i samma grafikfönster som f och Ta
hold off                   %avslutar kvarhållningen
legend('f(x)','Ta','Tb')
```

```
f =
exp(-2*x^2)
Ta =
1 - 2*x^2
Tb =
- (4*x^6)/3 + 2*x^4 - 2*x^2 + 1
     6
  4 x       4      2
- ---- + 2 x  - 2 x  + 1
    3
```



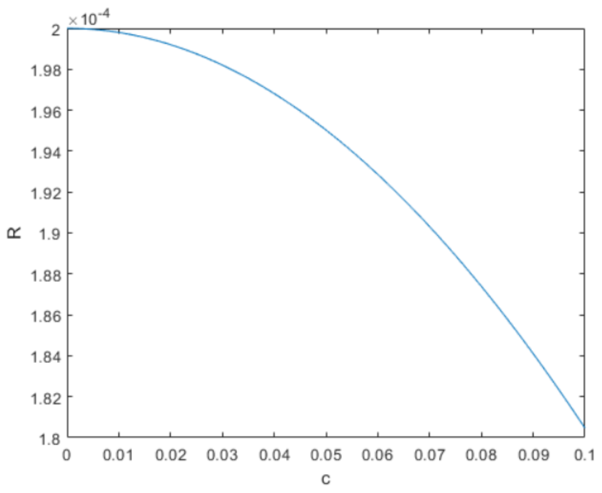
Lösningen till d-uppgiften. Hur stort felet blir vid beräkning med polynom ligger i hur variationen hos resttermen R.

Resttermen $R = \dfrac{f^{(4)}(c)}{(4)!}\,(x-0)^4 = \dfrac{f^{(4)}(c)}{24}\,x^4$ där $f^{(4)}(c)$ är fjärde derivatan av funktionen $f(x)$ och $0 < c < 0{,}1$. Vi söker det största värdet resttermen R kan ha för c-värden mellan 0 och 0,1. Utrycker R med variabeln c och plottar sedan grafen med c på x-axeln och R på y-axeln.

I MATLAB: (4! skrivs i MATLAB factorial(4).)

```
syms c
R=diff(f,x,4);            %deriverar f 4 gånger.
R=subs(R,x,c)/factorial(4)*(x-0)^4;  %definierar uttrycket för resttermen.
R1=abs(subs(R,x,0.1));                % Insättning av x=0,1 i resttermen.
cv=linspace(0,0.1);               % genererar c-värden mellan 0 och 0,1.
yR1=subs(R1,c,cv);                % tillhörande y-värden beräknas.
plot(cv,yR1)                      % kurvan för resttermen R plottas.
xlabel('c'); ylabel('R');         %text till axlarna
```

Resttermen plottas och från den kan man se hur stort felet kan vara maximalt (nästa sida).



Grafen visar att Resttermens största värde är för c nära 0 och är strax under 0,0002.

Beräknar i MATLAB:

```
format long
double(subs(f,x,0.1))
double(subs(Ta,x,0.1))
```

```
ans =
   0.980198673306755
ans =
   0.980000000000000
```

Här ser man att skillnaden i svaren ligger i den fjärde decimalen.

Uppgift 1: Betrakta uttrycket $K = \dfrac{ax - \ln(3x+a)}{1+bx}$.

a) Ersätt a med 2 och b med 1 och rita uttrycket för $0 \le x \le 10$.
b) Beräkna K(4) för a=2 och b=1. Svara både i exakt form och i decimal form.
c) För a=2 och b=-1, Är funktionen kontinuerlig i punkten x=1? Använd kommandot limit.

Uppgift 2: Betrakta funktionen $f(x) = -1 + \dfrac{x}{x+\sin x}$.

a) Plotta funktionen *f* tillsammans med först- och andraderivatan till *f* i intervallet $[1,10]$.
b) Lös ekvationen $f'(x) = 0$. (MATLAB kommer att varna om att det inte är möjligt att lösa symboliskt. Använd double för att beräkna ett numeriskt värde.)
c) Bestäm $f'''(2)$.

Uppgift 3. Låt $f(x) = \dfrac{x^2+4x+5}{x+1}$.

a) Bestäm den sneda asymptoter till $f(x)$. Använd limit. Sned asymptot $y = kx + m$ där

$k = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)$ och $m = \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right)$ gäller även för $x \to -\infty$.

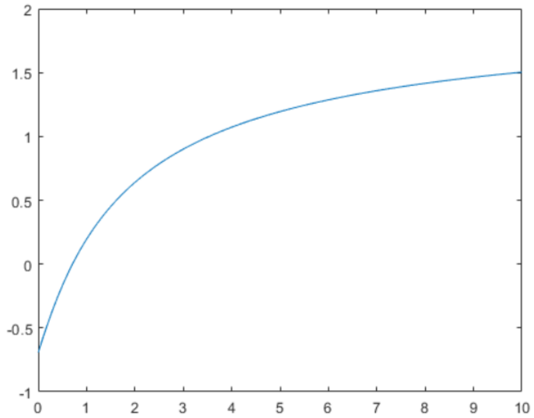
b) Rita funktionens graf tillsammans med den sneda asymptoten för $[-10,10]$. Rita med olika linjetyper och linjefärg.

Uppgift 4: funktionen $f(x) = x^2 e^x$.

a) Bestäm funktionens vågräta asymptot.
b) Bestäm $f''(x)$ och förenklar.
c) Bestäm Taylorpolynomet av ordning 2 kring punkten x=0.
d) Rita kurvan till funktionen f och Taylorpolynomet i samma grafikfönster.
*e) Hur stort kan felet bli maximalt när man uppskattar $f(0,1)$ med Taylorpolynomet av ordning 2?
(e-uppgiften för den flitige och frivillig att lämna in.)

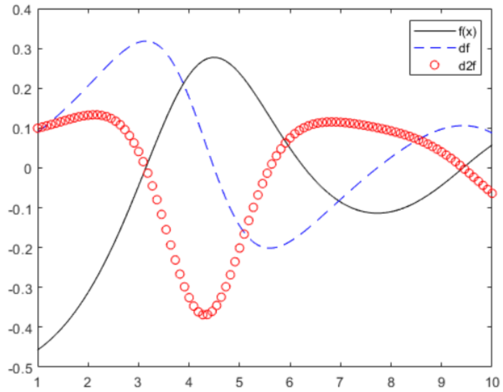
Svar:

1.



```
exaktSvar =

8/5 - log(14)/5


ans =

    1.0722


flimH =

-Inf


flimH =

Inf
```

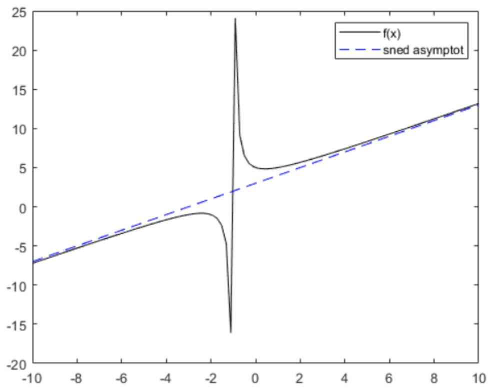
2.




```
Warning: Unable to solve symbolically. Returning a numeric solution using <a
href="matlab:web(fullfile(docroot, 'symbolic/vpasolve.html'))">vpasolve</a>.
ans =
 -227.7611
d3fSvar =
(3*sin(2))/(sin(2) + 2)^2 + (6*(cos(2) + 1)^2)/(sin(2) + 2)^3 - (12*(cos(2) + 1)^3)/(sin(2) + 2)^4 + (2*cos(2))/(sin(2) + 2)^2 - (12*sin(2)*(cos(2) + 1))/(si
ans =
    0.0150
```

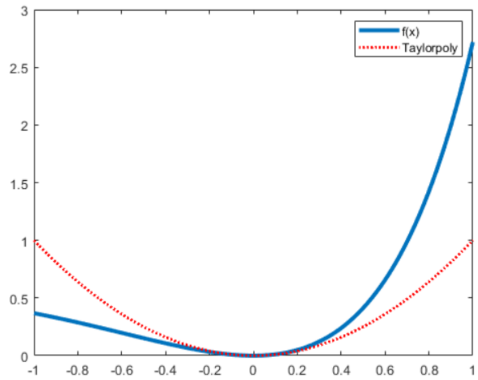
3.

```
y =
x + 3
```



4.

```
flimH =
Inf
flimV =
0
d2f =
exp(x)*(x^2 + 4*x + 2)
T =
x^2
```



*e) $R < 0{,}0012$ (då c är strax under 0,1)