HF1006 Analys
F12 Repetition inför KS2

1. Bestäm definitionsmängden till funktionen $y = 3 + \sin(x) + 2\sqrt{\dfrac{(x-2)(x-3)}{5-x}}$.

(KS2 22 nov 2021)

2. Betrakta funktionen $f(x) = 4\arccos(2x)$ och dess graf F.

a) Bestäm definitionsmängden.

b) Bestäm en ekvation för tangenten till grafen F i punkten x=0.

3. Låt $f(x) = \begin{cases} ax & \text{om } x \le 4 \\ x^2 - 8 & \text{om } x > 4 \end{cases}$.

a) Bestäm *a* så att funktionen är kontinuerlig i x = 4.

b) Undersök om funktionen är deriverbar för x = 4.

4. Beräkna följande gränsvärden

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4 + 3x^{11} + 3x^9}{5x^4 + 8x^{11} + x^8}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan(5x)}{2e^{4x} - 2}$ (KS2 22 nov 2021)

5. Låt $f(x) = 3xe^{-\frac{x}{4}}$.

a) Bestäm eventuella asymptoter (lodräta/vågräta /sneda).

b) Bestäm eventuella stationära punkter och deras typ.

c) Bestäm inflexionspunkten till kurvan f(x).

F12

HF1006

Repetition inför KS2

1) $y = 3 + \sin(x) + 2\sqrt{\dfrac{(x-2)(x-3)}{5-x}}$

$\sin x$, $x \in R$

$\sqrt{k}$, $k \geq 0$ där $k = \dfrac{(x-2)(x-3)}{5-x}$

och $5 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 5$

undersöker tecken för k.

x		2		3		5	
$(x-2)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-3)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$5-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
k	$+$	0	$-$	0	$+$	ej def.	$-$

Svar: $D_f = \{x \in R : x \leq 2 \wedge 3 \leq x < 5\}$

2) $f(x) = 4\arccos(2x)$

a) $\cos x$ har $V = \{-1 \leq y \leq 1\}$

innebär att $\arccos x$ har $D = \{-1 \leq x \leq 1\}$

alltså har $\arccos(2x)$ def. mängden

$-1 \leq 2x \leq 1 \Rightarrow \boxed{-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}}$

b) $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

$f'(x) = -\dfrac{4}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot 2 = \dfrac{-8}{\sqrt{1-4x^2}} \Rightarrow f'(0) = \dfrac{-8}{1} = -8$

$f(0) = 4 \cdot \arccos 0 = 4\frac{\pi}{2} = 2\pi$

$y - 2\pi = -8(x-0) \Rightarrow \boxed{y = -8x + 2\pi}$

3) $f(x) = \begin{cases} ax & x \le 4 \\ x^2 - 8 & x > 4 \end{cases}$

a) Kontinuerlig om $\lim_{x \to 4^+} f(x) = f(4)$

$$\left.\begin{aligned} f(4) &= a \cdot 4 = 4a \\ \lim_{x \to 4^+} x^2 - 8 &= 8 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad 4a = 8 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{a = 2}}$$

b) $f'(x) = \begin{cases} a & x \le 4 \\ 2x & x > 4 \end{cases}$ $\quad a = 2$

deriverbar om $\lim_{x \to 4^+} f'(x) = f'(4)$

$f'(4) = a$ $\quad$ ej deriverbar i $x = 4$.

$\lim_{x \to 4^+} 2x = 8$

om f är deriverbar i $x=4$ så är den kontinuerlig i $x=4$!

4) a) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{3x^4 + 3x^{11} + 3x^9}{5x^4 + 8x^{11} + x^8} = \left[\begin{array}{c} x^{11} \text{ är den} \\ \text{~~konstanten~~} \\ \text{dominerande} \\ \text{termen} \end{array} \right] =$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^{11}\left(\frac{3}{x^7} + 3 + \frac{3}{x^2}\right)}{x^{11}\left(\frac{5}{x^7} + 8 + \frac{1}{x^3}\right)} = \underline{\underline{\frac{3}{8}}}$$

b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\arctan 5x}{2e^{4x} - 2} = \left[\begin{array}{c} \text{typen } \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \\ \text{l'H} \end{array} \right] = \lim_{x \to 0} \dfrac{\frac{5}{1+(5x)^2}}{8e^{4x}} = \underline{\underline{\frac{5}{8}}}$

5) $f(x) = 3xe^{-\frac{x}{4}}$

a) $\lim_{x\to\infty} 3xe^{-\frac{x}{4}} = \cancel{3x} \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{e^{\frac{x}{4}}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \; l'H\right] =$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\frac{1}{4}e^{\frac{x}{4}}} = \frac{3}{4} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{\frac{x}{4}}} = 0$

horisontell asymptot $\underline{y=0}$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{\frac{1}{4}e^{\frac{x}{4}}} = \frac{3}{4} \lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{x}{4}} = \infty$

vertikal asymptot saknas eftersom $f(x)$ def. för alla x.

b) $f'(x) = 3\cdot e^{-\frac{x}{4}} + 3x\left(-\frac{1}{4}\right)e^{-\frac{x}{4}} = 3e^{-\frac{x}{4}}\left(1-\frac{x}{4}\right)$

$f'(x)=0$ ger $e^{-\frac{x}{4}}\left(1-\frac{x}{4}\right)=0$

$e^{-\frac{x}{4}} > 0$ för alla x $\qquad 1-\frac{x}{4}=0 \Leftrightarrow x=4$

Teckenstudium av f'

x		4	
$1-\frac{x}{4}$	+	0	−
f	växande ↗	max	avtagande ↘

Svar: $x=4$ maximipunkt.

c) $f''(x) = -\frac{3}{4}e^{-\frac{x}{4}}\left(1-\frac{x}{4}\right) + 3e^{-\frac{x}{4}}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3e^{-\frac{x}{4}}}{4}\left(-1+\frac{x}{4}-1\right) =$

$= \frac{3e^{-\frac{x}{4}}}{4}\left(\frac{x}{4}-2\right)$

$f''(x)=0$ ger $\frac{x}{4}-2=0 \Rightarrow x=8$

då $e^{-\frac{x}{4}} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Svar: $\underline{x=8}$