

TENTAMEN 15 aug 2019, HF1006 och HF1008

Moment: TEN1 (Linjär algebra), 4 hp, **skriftlig tentamen**

Kurser: Linjär algebra och analys HF1006 och Analys och linjär algebra, HF1008,

Klasser: TIELA1, TIMEL1, TIDAA1

Tid: 14-18, **Plats:** Campus Flemingsberg

Lärare: Maria Shamoun och Armin Halilovic

Examinator: Armin Halilovic

Betygsgränser: Maxpoäng = 24

För betyg A, B, C, D, E, Fx krävs 22, 19, 16, 13, 10 respektive 9 poäng.

Hjälpmedel på tentamen **TEN1:** Utdelad formelblad. **Miniräknare ej tillåten.**

Komplettering: 9 poäng på tentamen ger rätt till komplettering (betyg Fx) .

Skriv endast på en sida av papperet.

Skriv **TYDLIGT** NAMN och PERSONNUMMER på varje blad, (**speciellt tydligt på** försättsbladet, eftersom tentorna skannas och automatiskt kopplas till namn/personnummer som finns på försättsbladet)

Inlämnade uppgifter skall markeras med kryss på försättsbladet.

Tentafrågor (dvs. det här bladet) ska lämnas in tillsammans med lösningar.

Till samtliga uppgifter krävs fullständiga lösningar.

Uppgift 1. (4p) (Student som är **godkänd** på KS1 **hoppar över** uppgift 1.)

a) (2p) Vi betraktar triangeln ABC, där $A=(2, 2, p)$, $B=(3, 3, 3)$ och $C=(5, 4, 4)$

Bestäm p så att arean av triangeln ABC blir $\frac{\sqrt{3}}{2}$ a.e.

b) (2p) Bestäm skärningspunkten mellan linjen $L: (x, y, z) = (1, 2, 0) + t(2, 1, 1)$ och planet $\pi: x + y + 2z = 7$.

Uppgift 2) (4p)

a) För vilka värden på parametern a har ekvationssystemet

$$x + y + z = 3$$

$$2x + 2y + z = 1$$

$$4x + 4y + az = 7$$

oändligt många lösningar.

b) Lös systemet för detta värde på a .

Uppgift 3. (2p) Låt $z = \frac{i}{(1+i)^{10}}$. Bestäm i) $|z|$ och ii) $\arg(z)$

Uppgift 4. (2p) Låt $z = x + yi$ vara ett komplext tal. Lös ekvationen $2z + 3\bar{z} = 2 + 3i$.

Var god vänd.

Uppgift 5. (2p) a) Bestäm realdelen av $z = \frac{1+i}{1-i} + 4i^{2022}$.

b) Rita i det komplexa tal planet de punkter z som satisfierar

$$1 \leq |z| \leq 3 \text{ och } \frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Uppgift 6. (2p) Lös ekvationen $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$.

Uppgift 7. (4p)

$$\text{Låt } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Lös följande matrisekvationer (med avseende på X)

a) (2p) $AX + 2B = C$.

b) (2p) $(XA)^T + B^T = C$ (Där M^T betecknar transponatet till M).

Uppgift 8. (2p) Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen $A = \begin{bmatrix} 10 & -12 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Uppgift 9. (2p) Antag att $B = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ är en $n \times 1$ vektor. Visa då att om $A = \left[\frac{1}{n} BB^T - I_n \right]$, där I_n är enhetsmatrisen, då är $A^2 = -A$.

Lycka till!

FACIT

Uppgift 1. (4p) (Student som är **godkänd** på KS1 **hoppa över** uppgift 1.)

a) (2p) Vi betraktar triangeln ABC, där $A=(2, 2, p)$, $B=(3, 3, 3)$ och $C=(5, 4, 4)$

Bestäm p så att arean av triangeln ABC blir $\frac{\sqrt{3}}{2}$ a.e.

b) (2p) Bestäm skärningspunkten mellan linjen L: $(x, y, z) = (1, 2, 0) + t(2, 1, 1)$ och planet π : $x + y + 2z = 7$.

Lösning:

a)

Arean beräknas med tex $\frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|}{2}$ detta ger att $\frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned} |(1, 1, 3-p) \times (2, 1, 1)| &= \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3-p & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3-p & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right| = |(1-(3-p), -(1-2(3-p)), 1-2)| = \\ &= |((p-2), 5-2p, -1)| = \sqrt{(p-2)^2 + (5-2p)^2 + 1} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Vilket ger att

$$p^2 - 4p + 4 + 25 - 20p + 4p^2 + 1 = 3 \Rightarrow 5p^2 - 24p + 27 \Rightarrow p_1 = \frac{9}{5} \text{ och } p_2 = 3$$

Svar a: $p = \frac{9}{5}$ eller $p = 3$

Rättningsmall a) Korrekt till ekvationen $\sqrt{(p-2)^2 + (5-2p)^2 + 1} = \sqrt{3}$ (eller ekvivalent ekvation) ger 1p. Allt korrekt=2p.

b)

Insättning av L i π ger:

$$1 + 2t + 2 + t + 2 \cdot t = 7 \Leftrightarrow t = \frac{4}{5}$$

Koordinaterna till skärningspunkten blir då

$$x = 1 + 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{13}{5}$$

$$y = 2 + \frac{4}{5} = \frac{14}{5}$$

$$z = \frac{4}{5}$$

Svar b: Skärningspunkten är $\left(\frac{13}{5}, \frac{14}{5}, \frac{4}{5}\right)$

Rättningsmall a) Korrekt $t = \frac{4}{5}$ ger 1p. Allt korrekt=2p.

Uppgift 2) (4p)

a) För vilka värden på parametern a har ekvationssystemet

$$x + y + z = 3$$

$$2x + 2y + z = 1$$

$$4x + 4y + az = 7$$

oändligt många lösningar.

b) Lös systemet för detta värde på a .

Lösning:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & a & 7 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2E_1 + E_2 \\ -4E_1 + E_3 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & a-4 & -5 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -E_2 \\ (a-4)E_2 + E_3 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 15-5a \end{array} \right)$$

a) Ekvationssystemet har oändligt många lösningar om $15 - 5a = 0 \Leftrightarrow a = 3$

Alternativ: Man kan först lösa $\text{Det}(A)=0$ och därefter visa att $a=3$ ger oändligt många lösningar.

b) Lösningen för $a=3$ blir
$$\begin{cases} x = -2 - t \\ y = t \\ z = 5 \end{cases}$$

Rättningsmall a) Korrekt till trappformen ger 1p. Allt korrekt=2p.

(Alternativ lösning: 1p om determinanten är korrekt.)

b) Korrekta två variabler ger 1p. Allt korrekt=2p.

Uppgift 3. (2p) Låt $z = \frac{i}{(1+i)^{10}}$. Bestäm i) $|z|$ och ii) $\arg(z)$

Lösning:

Skriver om z i polärform och förenklar:

$$\begin{aligned} z &= \frac{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}}{\left(\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right)^{10}} = \frac{1}{(\sqrt{2})^{10}} \cdot \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - 10 \cdot \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - 10 \cdot \frac{\pi}{4} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{32} \cdot (\cos(-2\pi) + i \sin(-2\pi)) = \frac{1}{32} \end{aligned}$$

i) Svar: $|z| = \frac{1}{32}$

ii) Svar: $\arg(z) = 0$

Rättningsmall: Korrekt $|z| = \frac{1}{32}$ ger 1p, **Korrekt** $\arg(z) = 0$ ger 1p,

Uppgift 4. (2p) Låt $z = x + yi$ vara ett komplext tal. Lös ekvationen $2z + 3\bar{z} = 2 + 3i$.

Lösning:

Insättning av $z = x + yi$ i ekvationen ger:

$$2(x + iy) + 3(x - iy) = 2 + 3i \Leftrightarrow 5x - iy = 2 + 3i$$

Identifierar lika termer i vänster- och högerled:

$$\begin{cases} 5x = 2 \\ -y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = -3 \end{cases}$$

Svar: $z = \frac{2}{5} - 3i$

Rättningsmall: Korrekt till systemet $\begin{cases} 5x = 2 \\ -y = 3 \end{cases}$ ger 1p. Allt korrekt=2p.

Uppgift 5. (2p) a) Bestäm realdelen av $z = \frac{1+i}{1-i} + 4i^{2022}$.

b) Rita i det komplexa tal planet de punkter z som satisfierar (båda villkor)

$$1 \leq |z| \leq 3 \text{ och } \frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Lösning:

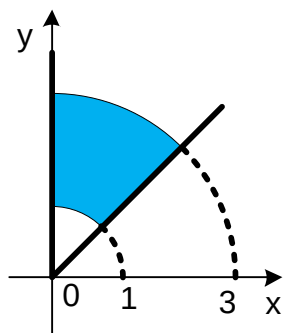
a) Först $\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{2i}{2} = i$ och $4i^{2022} = 4 \cdot (i^2)^{1011} = 4 \cdot (-1)^{1011} = -4$

har vi $z = \frac{1+i}{1-i} + 4i^{2022} = i - 4$.

Därför $\operatorname{Re}(z) = -4$.

Svar a: $\operatorname{Re}(z) = -4$

b)



Svar b) Se ovanstående figur (Området är markerad med blå färg).

Rättningsmall: Korrekt a ger 1p, korrekt b ger 1p

Uppgift 6. (2p) Lös ekvationen $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & x \end{vmatrix} = 0.$

Determinanten $D = x(2x - 6) - 1(2x - 12) + 2(6 - 12) = 2x^2 - 8x = 2x(x - 4).$

$D=0 \Leftrightarrow 2x(x-4)=0 \Leftrightarrow x_1=0$ eller $x_2=4.$

Svar: $x_1=0, x_2=4$

Rättningsmall: Korrekt determinant $D = 2x^2 - 8x$ ger 1p.

Allt korrekt= 2p.

Uppgift 7. (4p)

Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$

Lös följande matrisekvationer (med avseende på X)

a) (2p) $AX + 2B = C.$

b) (2p) $(XA)^T + B^T = C$ (Där M^T betecknar transponatet till M).

Lösning:

a)

Från $AX + 2B = C$ har vi $AX = C - 2B.$

Eftersom $\det(A) = 6-5=1 \neq 0$ är A inverterbar: $A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}.$

Nu har vi

$$AX = C - 2B \Leftrightarrow X = A^{-1}(C - 2B)$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} -9 & 7 \\ 15 & -11 \end{bmatrix}$$

b) Enligt räknelagar för transponering gäller $(XA)^T = A^T X^T$.

Från $(XA)^T + B^T = C$ har vi

$$A^T X^T + B^T = C \text{ eller } A^T X^T = C - B^T,$$

$$\text{där } A^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{text} \quad B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Eftersom $\det(A^T) = 6-5=1 \neq 0$ är A^T inverterbar: $(A^T)^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Nu har vi

$$A^T X^T = C - B^T \Leftrightarrow X^T = (A^T)^{-1}(C - B^T)$$

$$\Leftrightarrow X^T = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\Leftrightarrow X^T = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X^T = \begin{bmatrix} -19 & -9 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Härav } X = \begin{bmatrix} -19 & 7 \\ -9 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$\textbf{Svar: a)} X = \begin{bmatrix} -9 & 7 \\ 15 & -11 \end{bmatrix} \quad \textbf{b)} } X = \begin{bmatrix} -19 & 7 \\ -9 & 4 \end{bmatrix}$$

Rättningsmall: a) Korrekt A^{-1} ger 1p. Allt korrekt=2p.

b) Korrekt till $X^T = (A^T)^{-1}(C - B^T)$ ger 1p. Allt korrekt=2p.

Uppgift 8. (2p) Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen $A = \begin{bmatrix} 10 & -12 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Steg 1. Vi får matrisens egenvärden genom att lösa den karakteristiska ekvationen

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (\text{EKV1})$$

Vi har:

$$\begin{vmatrix} (10-\lambda) & -12 \\ 2 & (0-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (10-\lambda)(-\lambda) - 2 \cdot (-12) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 24 = 0.$$

Härav $\lambda_1 = 4$ och $\lambda_2 = 6$

Steg 2. För varje egenvärden (dvs. lösning till EKV1) λ_k substituerar vi $\lambda = \lambda_k$ i

$$(A - \lambda I) \vec{v} = \vec{0} \quad (\text{EKV2})$$

och bestämmer motsvarande egenvektor.

i) $\lambda_1 = 4$ ger $\begin{bmatrix} 6 & -12 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ och följande system

$$\begin{cases} 6x - 12y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{ \text{förkorta} \} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Härav $y = t$ och $x = 2t$, och därmed är $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix}$, (där $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$) tillhörande egenvektorer.

ii) $\lambda_2 = 6$ ger $\begin{bmatrix} 4 & -12 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ och följande system

$$\begin{cases} 4x - 12y = 0 \\ 2x - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{ \text{förkorta} \} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Härav $y = t$ och $x = 3t$, och därmed är $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 3t \\ t \end{bmatrix}$, (där $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$) tillhörande egenvektorer. (Anmärkning: Nollvektorn räknas inte som en egenvektor, därför $t \neq 0$.)

Svar: egenvärden $\lambda_1 = 4$ och $\lambda_2 = 6$ med tillhörande egenvektorer

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix} \text{ resp. } \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 3t \\ t \end{bmatrix} \quad (\text{där } t \in \mathbb{R}, \quad t \neq 0)$$

Rättningsmall: Korrekta två egenvärden ger 1p. Korrekt ett egenvärde med tillhörande egenvektor ger 1p. Allt korrekt=2p.

Uppgift 9. (2p) Antag att $B = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ är en $n \times 1$ vektor. Visa då att om $A = \left[\frac{1}{n} BB^T - I_n \right]$, där I_n är enhetsmatrisen, då är $A^2 = -A$.

Lösning:

$$\begin{aligned} A^2 &= \left[\frac{1}{n} BB^T - I_n \right]^2 = \left[\frac{1}{n} BB^T - I_n \right] \left[\frac{1}{n} BB^T - I_n \right] = \frac{1}{n^2} BB^T BB^T - \frac{2}{n} BB^T + I_n \\ &= \{OBS \text{ att } B^T B = n\} = \frac{n}{n^2} BB^T - \frac{2}{n} BB^T + I_n = \frac{1}{n} BB^T - \frac{2}{n} BB^T + I_n \\ &= -\frac{1}{n} BB^T + I_n = -A \end{aligned}$$

VSV!

Rättningsmall: Rätt eller fel.