

Övre betygsdel

Exempel hämtade från gamla tentor, inom parentes angivet vilken där ni kan hitta lösningarna.

1. Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Lös följande matrisekvationer (med avseende på X)

a) $AX + 2B = C$. (E-nivå)

b) $(XA)^T + B^T = C$ (Där M^T betecknar transponatet till M). (TEN1 15 aug 2019)

2. För vilka värden på parameter a har ekvationssystem (med avseende på x, y och z)

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ x + 4y + 4z = 3 \\ 3x + 8y + az = 7 \end{cases}$$

i) exakt en lösning ii) ingen lösning iii) oändligt många lösningar.

(TEN1 20191216)

3. a) Lös matrisekvationen $XA + XB = C$ (med avseende på X) där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

b) (2p) Lös matrisekvationen $PY + YQ = R$ (med avseende på Y) där

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(TEN A, 20 dec 2021)

4. Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen $A = \begin{bmatrix} 10 & -12 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

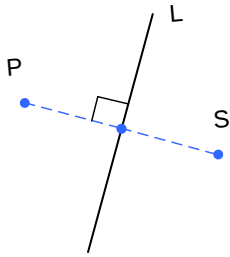
(TEN1 15 aug 2019)

5. Det komplexa talet $z_1 = 1 - 2i$ är en lösning till ekvationen $2z^3 - z^2 + 4z + 15 = 0$.

Bestäm alla lösningar till ekvationen. (TEN1 20 okt 2020)

6. Låt S vara spegelbilden av punkten P i linjen L . Linjens ekvation är $(x, y, z) = (-2, -2, -2) + t(1, 2, 2)$. Bestäm spegelbilden S om punkten $P = (6, 0, -2)$.

(TEN1 20 okt 2020)



7. Betrakta det komplexa talet $z = \frac{a+3i}{2+ai}$, där a är ett reellt tal. Bestäm a sådant att

$\arg(z) = \frac{\pi}{4}$. (Lösningen finns på sista sida.)

8. Ekvationen $|z-1-i| = |z-3i|$ beskriver en rät linje i det komplexa talplanet. Sätt $z = x+iy$ och skriv ekvationen på formen $y = kx+m$.

(TEN1 20191216)

9. Lös matrisekvationen $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} R^2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$, där $R = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}$ och $c^2 + s^2 = 1$.

(TEN1 25 okt 2016)

10. Låt $x+y+2z=3$ vara en ekvation till planet Π . En laserstråle som går genom punkten $B=(2,3,3)$ och är parallell med linjen $(x, y, z) = (4, 5, 6) + t(1, 1, 1)$ reflekteras i planet Π . Bestäm en ekvation för den reflekterade laserstrålen. (TEN1 23 okt 2018)

11. En sfär S tangerar de två parallella planen $2x-y+2z=-15$ och $2x-y+2z=-3$ och har sin medelpunkt på linjen $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+4}{2}$ som är vinkelrät mot planen. Ange ekvationen för sfären S . (Lösningen finns på sista sida.)

Lösningar till:

uppgift 5:

Givet är $z = \frac{a+3i}{2+ai}$. Söker a sådant att $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$.

Förenklar z för att identifiera $\operatorname{Re} z$ och $\operatorname{Im} z$:

$$\frac{(a+3i)}{(2+ai)} \cdot \frac{(2-ai)}{(2-ai)} = \frac{2a - a^2i + 6i - 3ai^2}{4 - a^2i^2} = \frac{2a + 3a}{4 + a^2} + i \cdot \frac{6 - a^2}{4 + a^2}$$

$$\tan \frac{\pi}{4} = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = \frac{6 - a^2}{4 + a^2} \bigg/ \frac{5a}{4 + a^2}$$

$$1 = \frac{6 - a^2}{5a}, \quad a \neq 0$$

$$5a = 6 - a^2$$

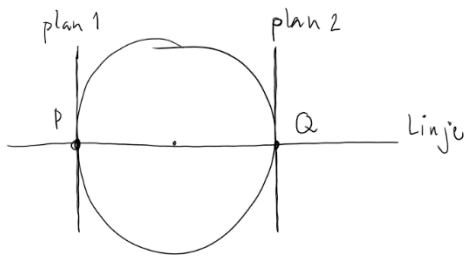
$$a^2 + 5a - 6 = 0$$

$$a = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{6 \cdot 4}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \frac{7}{2}$$

$$a_1 = 1 \text{ eller } a_2 = -6$$

Svar: $a = 1$ eller $a = -6$

11) Linjen $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+4}{2}$ omskrivning till parameterform $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -t \\ z = -4+2t \end{cases}$



plan 1: $2x - y + 2z = -15$

plan 2: $2x - y + 2z = -3$

Beräkna skärningen mellan planen och linjen:

P: $2(1+2t) + t + 2(-4+2t) = -15 \Leftrightarrow 2+4t+t-8+4t = -15$
 $9t = -9 \Leftrightarrow t = -1$

$P = (1+2 \cdot (-1), -(-1), -4+2 \cdot (-1)) = \underline{(-1, 1, -6)}$

Q: $2+4t+t-8+4t = -3 \Leftrightarrow 9t = 3 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$

$Q = (1+2 \cdot \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -4+2 \cdot \frac{1}{3}) = (\frac{3+2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{-12+2}{3}) = (\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{10}{3})$

Medelpunkten på sfären: $x = \frac{-1 + \frac{5}{3}}{2} = \frac{-\frac{3}{3} + \frac{5}{3}}{2} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$

$y = \frac{1 + (-\frac{1}{3})}{2} = \frac{\frac{3-1}{3}}{2} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$

$z = \frac{-6 + (-\frac{10}{3})}{2} = \frac{-\frac{18}{3} - \frac{10}{3}}{2} = \frac{-\frac{28}{3}}{2} = -\frac{14}{3}$

Sfärens radie: $r = \sqrt{(\frac{5}{3} - \frac{1}{3})^2 + (-\frac{1}{3} - \frac{1}{3})^2 + (-\frac{10}{3} + \frac{14}{3})^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{36}{9}} = 2$

Svar: $(x - \frac{1}{3})^2 + (y - \frac{1}{3})^2 + (z + \frac{14}{3})^2 = 4$