

Exempeltenta

Exempel hämtade från gamla tentor, inom parentes angivet vilken och där hittar ni lösningarna.

Del I 2p/uppgift

1) Bestäm det komplexa talet $z = x + iy$ som satisfierar följande ekvation

$$z \cdot i + 3\bar{z} = 5 - i. \text{ (Notera att } \bar{z} \text{ betecknar konjugatet till } z.) \text{ (TEN1 20191216)}$$

2) Beräkna $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{86}$. Svara på rektangulär form (dvs. på $a+bi$ form). (Uppgift från

TEN1 23 okt 2018 med liten justering, lösning på sista sidan i detta dokument.)

3) Vektorerna $\vec{a} = (-1, 2, 1)$, $\vec{b} = (3, 0, 6)$ och $\vec{c} = (1, 2, -1)$ är givna. Bestäm konstanten k så att vektorn $\vec{d} = \vec{c} + k\vec{b}$ blir vinkelrät mot $\vec{a}$. (KS1, 20140929)

4) Bestäm planets ekvation på formen $ax + by + cz + d = 0$, då man vet att punkterna $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 3, 4)$ och $C = (2, 2, 1)$ ligger i planet. (KS1, 20140929)

5) Bestäm X ur matrisekvationen $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} X - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. (TEN1, 20 okt 2020)

6) Lös ekvationen $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3x \end{vmatrix} = 5$. (KS1, 16 sep 2019)

HF1006 Linjär algebra

Del II

7. (2p) Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ 2x + 2y + z = 4 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases} \quad (\text{TEN1 25 okt 2016})$$

8) (2p) I triangeln ABC är $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$ och $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$. Punkten B_1 delar sida AC i förhållandet 1:3 dvs $\overrightarrow{B_1C} = 3\overrightarrow{AB_1}$. Utryck vektorn $\overrightarrow{AB_1}$ som en linjär kombination av $\vec{a}$ och $\vec{c}$. (Med andra ord ange vektorn $\overrightarrow{AB_1}$ på formen $\overrightarrow{AB_1} = p\vec{a} + q\vec{c}$). (TEN1, 29 okt 2014)

9) (2p) Lös ekvationen $z^3 = 32\sqrt{2} - 32i\sqrt{2}$ och ange alla lösningar på potensform eller på polär form (välj själv). (TEN1, 2 mars 2021)

10. (2p) Låt $z = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} \cdot e^{\frac{\pi}{5}i} \cdot (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$. Bestäm $\arg(z)$. (TEN1 20 dec 2021)

11. (3p) Ett plan α har en normalvektor $\vec{n} = (1, 0, 3)$. Punkterna $A = (1, 0, 1)$ och $B = (1, 2, 1)$ ligger i planet α . Låt L beteckna den linje som går genom punkterna A och B. Bestäm en vektor **i planet** α som bildar 45 graders vinkel mot linjen L. (TEN1, 29 okt 2014)

12. (3p) Lös följande ekvation (med avseende på x)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2a & 4a^2 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & b & b^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Tips: Betrakta två fall: fall1 $b=2a$ och fall2 $b \neq 2a$ (TEN A, 20 dec 2021)

HF1006 Linjär algebra

Lösningar till

Uppgift 2:

Först skriver vi basen $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$ på exponentialform:

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1,$$

$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$ ligger i fjärde kvadranten:

$$\theta = \arg\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\arg\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\arctan\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}:$$

(Alternativt kan man se i det komplexa planet att $\theta = -\frac{\pi}{4}$.)

$$\text{Därmed är } \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} = e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

$$\text{Nu har vi } \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{86} = \left(e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^{86} = e^{-\frac{86\pi}{4}i} = e^{-\frac{43\pi}{2}i} = \cos\left(-\frac{43\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{43\pi}{2}\right)$$

$$= \cos\left(-20\pi - \frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-20\pi - \frac{3\pi}{2}\right) = (\text{periodiska egenskaper})$$

$$= \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$$

$$\text{Svar: } \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{86} = i$$