

1. Bestäm skärningen mellan planen $x + 2y + z = 4$ och $2x - 6y = 6$.

2. Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

3. Beräkna volymen av pyramiden som har hörn i punkterna $(-1, 2, 1)$, $(2, 1, -1)$, $(1, -2, 0)$ och origo.

*4. Beräkna koordinaterna för spegelbilden av $P(0, 0, 4)$ i planet $x + 2y - 7z - 1 = 0$.

$$1/ \begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$$

$$\left\{ \text{ekv 1} - \frac{1}{2} \text{ekv 2} \right\} \begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 5y + z = 1 \end{cases}$$

fri variabel $z = t$ ger $y = \frac{1-z}{5} = \frac{1}{5} - \frac{t}{5}$

$$x = 4 - 2y - z = 4 - 2\left(\frac{1}{5} - \frac{t}{5}\right) - t = 4 - \frac{2}{5} + \frac{2t}{5} - t$$

$$x = \frac{18}{5} - \frac{3t}{5}$$

Svar: $\begin{cases} x = \frac{18}{5} - \frac{3t}{5} \\ y = \frac{1}{5} - \frac{t}{5} \\ z = t \end{cases}$ eller $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = t \\ z = 1 - 5t \end{cases}$

$$2/ \begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases} \quad \sim \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right] \sim$$

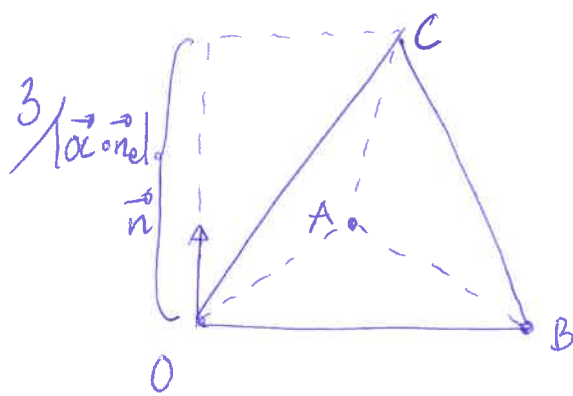
$$\sim \begin{pmatrix} \text{rad 1} \\ 2\text{rad 1} - \text{rad 2} \\ 3\text{rad 1} - \text{rad 3} \end{pmatrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -2 & 7 & 17 \\ 0 & -3 & 11 & 27 \end{array} \right] \sim \begin{pmatrix} \text{rad 1} \\ -\text{rad 2} \\ -3\text{rad 2} + 2\text{rad 3} \end{pmatrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -2 & 7 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Tolka tillbaka till ekv. syst.:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ -2y + 7z = 17 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{17 - 7z}{-2} = \frac{17 - 7 \cdot 3}{-2} = 2$$

$$x = 9 - y - 2z = 9 - 2 - 2 \cdot 3 = 1$$

Svar:
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$



$$A(-1, 2, 1) \quad B(2, 1, -1) \\ C(1, -2, 0)$$

$$\text{Basarea} = \frac{|\vec{OA} \times \vec{OB}|}{2}, \quad \text{höjden} = \frac{|\vec{OC} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \text{ där } \vec{n} = \vec{OA} \times \vec{OB}$$

$$\text{Volymen} = \frac{1}{3} \text{Basarea} \cdot \text{höjden}$$

$$\vec{OA} = (-1, 2, 1), \quad \vec{OB} = (2, 1, -1), \quad \vec{OC} = (1, -2, 0)$$

$$\vec{OA} \times \vec{OB} = (-1, 2, 1) \times (2, 1, -1) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2-1, 2-1, -1-4) = (-3, 1, -5)$$

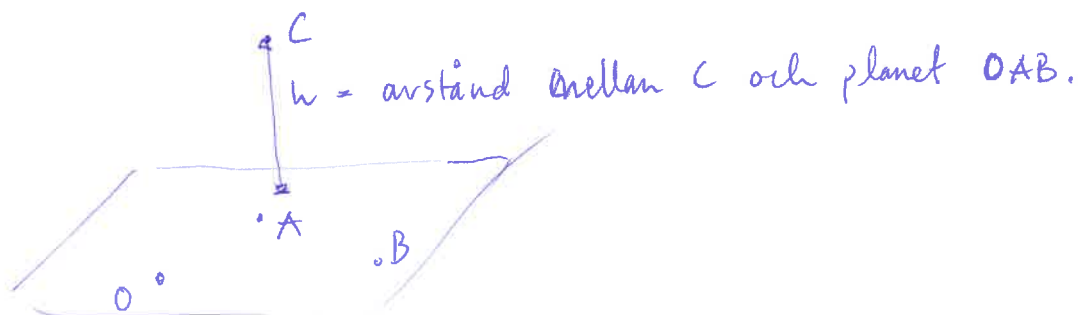
$$\vec{n} = (-3, 1, -5)$$

$$\text{Basarea} = \frac{1}{2} \sqrt{3^2 + 1^2 + 5^2} = \frac{1}{2} \sqrt{35}$$

$$\text{höjden} = \frac{|(1, -2, 0) \cdot (-3, 1, -5)|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 5^2}} = \frac{|-3 + (-2) + 0|}{\sqrt{35}} = \frac{5}{\sqrt{35}}$$

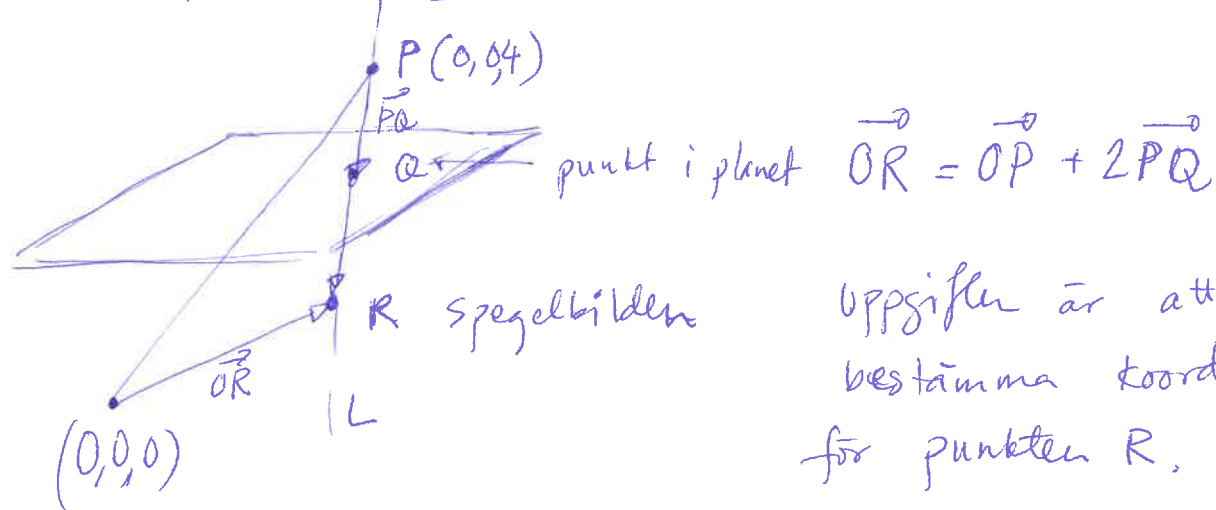
$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{35} \cdot \frac{5}{\sqrt{35}} = \frac{5}{6}$$

Alternativ lösning för höjden



4/

$$x + 2x - z - 1 = 0$$



Behöver bestämma punkten Q:s koordinater.
 Linjen L som går genom P och har riktningsvektorn
 $\vec{v} = \text{planets normalvektor}$. Q är då skärningspunkten
 mellan planet och linjen.

$$L: \begin{cases} x = 0 + t \\ y = 0 + 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

ins. i planets ekvation:

$$t + 2 \cdot 2t - 4 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow 6t = 5$$

$$t = \frac{5}{6}$$

$$Q\left(\frac{5}{6}, \frac{2 \cdot 5}{6}, 4 - \frac{5}{6}\right) = \left(\frac{5}{6}, \frac{5}{3}, \frac{19}{6}\right)$$

$$\vec{OR} = (0, 0, 4) + 2\left(\frac{5}{6} - 0, \frac{5}{3} - 0, \frac{19}{6} - 0\right) =$$

$$\vec{OR} = \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, 4 + \frac{19}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, \frac{31}{3}\right)$$

Svar: $\vec{R}$ spegelebildens koordinater $\left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, \frac{31}{3}\right)$