



KTH Teknik och hälsa

Kurs:	HF1006
Moment:	Kontrollskrivning
Program:	TIDAA, TIELA, TIMEL
Examinator:	Maria Shamoun
Jourhavande lärare:	Maria Shamoun, tel. 08 790 9712
Datum:	2022-09-19
Tid:	8:15 – 10:00
Hjälpmedel:	Formelblad
Omfattning och betygsgränser:	Totalpoäng: 10p För betyget P krävs: 6p
Övrig information:	Undvik röda pennor. Skriv namn och personnummer på varje papper. Skriv bara på papprets ena sida. Till samtliga uppgifter krävs fullständiga lösningar. Lösningarna skall vara väl motiverade, tydliga och lätta att följa. Svaret ska framgå tydligt. Lycka till!

1. a) Lös följande ekvation: $\frac{z^2}{2} + 3z + 7 = 0$. (1p)

b) Bestäm $\operatorname{Re} z$, då $z = (3 + 4i)^2$. (1p)

2. Lös följande ekvation: $z + 2i\bar{z} = \frac{-4 + 13i}{2 + i}$. (2p)

3. Beräkna $(1 - \sqrt{3} \cdot i)^{20}$. Svara på rektangulär form. (2p)

4. Rita lösningsmängden i det komplexa talplanet till följande system av olikheter:

$$\begin{cases} -\frac{2\pi}{3} \leq \arg z \leq \frac{2\pi}{3} \\ |z| \leq 4 \end{cases} \quad (2p)$$

5. Låt $\vec{u} = (1, 3, 6)$ och $\vec{v} = (0, -2, 3)$. Låt också $\vec{r} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$ och $\vec{s} = \vec{v} - \vec{u}$. Avgör om vektorerna $\vec{r}$ och $\vec{s}$ är parallella. (2p)

Lösningsförslag:

1. a) Använd pq-formeln. Skriv först på standardform:

$$\frac{z^2}{2} + 3z + 7 = 0$$

$$z^2 + 6z + 14 = 0$$

$$z = -3 \pm \sqrt{3^2 - 14} = -3 \pm \sqrt{5} \cdot i$$

$$\text{b) } z = (3 + 4i)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4i + (4i)^2 = -7 + 24i \Rightarrow \operatorname{Re} z = -7$$

$$\text{Svar: a) } z = -3 \pm \sqrt{5} \cdot i \quad \text{b) } \operatorname{Re} z = -7$$

Rättningsmall: a) Allt rätt 1p, b) Allt rätt 1p

2. Låt först $z = a + bi$. Insättning i ekvationen ger:

$$a + bi + 2i \cdot (a - bi) = \frac{-4 + 13i}{2 + i}. \quad \text{Förenkla först höger led.}$$

$$\frac{-4 + 13i}{2 + i} = \frac{(-4 + 13i) \cdot (2 - i)}{(2 + i) \cdot (2 - i)} = \frac{-8 + 4i + 26i - 13i^2}{5} = \frac{5 + 30i}{5} = 1 + 6i$$

Detta insättes i ekvationen.

$$a + bi + 2i \cdot (a - bi) = 1 + 6i$$

$a + bi + 2ai + 2b = 1 + 6i$ Identifiera realdelar resp. imaginärdelar i vänster led med motsvarande i höger led.

$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ b + 2a = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 - 2b \\ b + 2 \cdot (1 - 2b) = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{11}{3} \\ b = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\text{Svar: } z = \frac{11}{3} - \frac{4}{3} \cdot i$$

Rättningsmall: Sätter $z = a + bi$ och ställer upp ett korrekt ekvationssystem för a och b. Därefter fel. 1p

Allt rätt 2p

3. $(1 - \sqrt{3} \cdot i)^{20}$ ska beräknas. För att slippa multiplicera ihop 20 parentesuttryck omvandlar man först till polär form (går även bra med potensform):

$$\text{Belopp: } \left| (1 - \sqrt{3} \cdot i)^{20} \right| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\text{Argument: } \tan v = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3},$$

$$\text{Formelblad formel nr 12 och 9 ger: } -\sqrt{3} = -\tan \frac{\pi}{3} = \tan \left(-\frac{\pi}{3} \right),$$

$$\text{d.v.s. } v = -\frac{\pi}{3} \text{ är en lösning. Rätt argument är alltså } -\frac{\pi}{3} \text{ eller } -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{Tecknen för real- och imaginärdel visar att } v = -\frac{\pi}{3}.$$

De Moivres formel ger:

$$\begin{aligned} (1 - \sqrt{3} \cdot i)^{20} &= \left(2 \cdot \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) \right)^{20} = 2^{20} \cdot \left(\cos \left(-\frac{20\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{20\pi}{3} \right) \right) = \\ &= 2^{20} \cdot \left(\cos \left(\frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{4\pi}{3} \right) \right) \quad (\text{polär form med minsta positiva argument}) \end{aligned}$$

I rektangulär form:

$$2^{20} \cdot \left(\cos \left(\frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{4\pi}{3} \right) \right) = 2^{20} \cdot \left(-\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right) = 2^{20} \cdot \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -2^{19} - i \cdot 2^{19} \sqrt{3}$$

$$\text{Svar: } -2^{19} - i \cdot 2^{19} \sqrt{3}$$

Rättningsmall:

Fel argument vid omskrivning av $1 - i\sqrt{3}$ till polärform, räknar med $\frac{\pi}{3}$ eller $\frac{2\pi}{3}$, resten korrekt, 1p

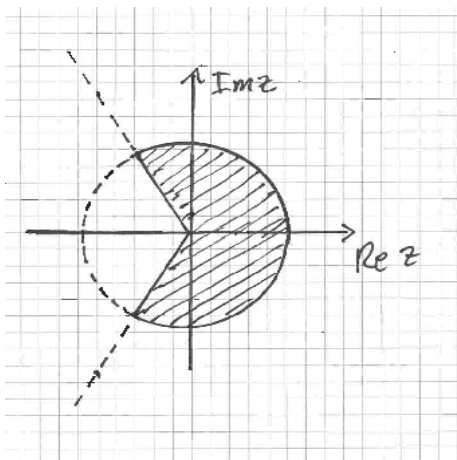
Korrekt till $2^{20} \cdot \left(\cos \left(-\frac{20\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{20\pi}{3} \right) \right)$ sedan fel, 1p

All rätt, 2p

4. Första olikheten $-\frac{2\pi}{3} \leq \arg z \leq \frac{2\pi}{3}$ ger en lösningsmängd som innefattar alla punkter i talplanet i riktning mellan $-\frac{2\pi}{3}$ och $\frac{2\pi}{3}$ från origo (kantlinjer medräknas).

Andra olikheten $|z| \leq 4$ ger en cirkelskiva med radie 4 och centrum i origo (periferin räknas också med).

Systemet har då en lösningsmängd som ser ut enligt figuren nedan:



Rättningsmall:

Fel område eller rätt område men inte ifyllt, 0p

Rätt område men någon av linjerna/cirkelbåge streckad, 1p

Allt rätt, 2p

5. $\vec{r} = 2 \cdot (1, 3, 6) + 3 \cdot (0, -2, 3) = (2, 0, 21)$ $\vec{s} = (0, -2, 3) - (1, 3, 6) = (-1, -5, -3)$

Parallella om $\vec{r} = t\vec{s}$ för något t.

$$\begin{cases} 2 = -t \\ 0 = -5t \\ 21 = -3t \end{cases} \quad \text{Uppenbart att inget sådant t existerar!}$$

Svar: De är inte parallella.

Rättningsmall:

Korrekta vektorer $\vec{r}$ och $\vec{s}$ men svar saknas, 0p

Korrekta vektorer $\vec{r}$ och $\vec{s}$ samt korrekt svar men ingen motivering till svaret eller felaktigt resonemang, 1p

Korrekta vektorer $\vec{r}$ och $\vec{s}$ med ett motiverat svar, 2p