

1. Bestäm $\operatorname{Re}(w)$ om $w = (1+i)^{100}$. (tenta 20170410) (2p)

2. Bestäm alla lösningar till $z^3 = -i$. Ange lösningarna på formen $a+bi$. (tenta 20171218) (2p)

3. Skriv om talet $\frac{(3-i)(3+i)}{1+2i} \cdot e^{i\pi}$ på formen $a+bi$. (tenta 20171024) (2p)

4. Rita lösningsmängden till följande ekvationssystem i det komplexa talplanet. Skriv gärna lite förklarande text till figuren. (2p)

$$\begin{cases} \operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z \\ |z - 2 - 2i| = 2 \end{cases}$$

5. a) Låt $\vec{u} = (2,1)$ och $\vec{v} = (4,-1)$. Bestäm konstanterna a och b så att $a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} = (-2,5)$ (1p)

b) Två punkter är givna, $A = (-1,3)$ och $B = (1,5)$. Bestäm vektorn $\vec{v}$, så att

den har samma riktning som $\vec{AB}$, men bara $\frac{1}{6}$ av $\vec{AB}$'s längd. (1p)

Lösningar:

$$1. \quad w = (1+i)^{100} = \left(2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^{100} = 2^{50} \cdot e^{25\pi i} = 2^{50} \cdot e^{\pi i} = (25\pi - 12 \cdot 2\pi = \pi)$$

$$= 2^{50} \cdot (\cos \pi + i \sin \pi) = -2^{50}$$

$$\text{Svar: } \operatorname{Re} w = -2^{50}$$

$$2. \quad z^3 = -i$$

$$\text{På potensform: } (re^{iv})^3 = r^3 e^{3vi} = 1 \cdot e^{\frac{3\pi}{2}i}$$

$$\text{Detta ger att } \begin{cases} r^3 = 1 \\ 3v = \frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ v = \frac{\pi}{2} + n \cdot \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Härav:

$$z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + n \cdot \frac{2\pi}{3}\right)}, \quad n = 0, 1, 2$$

$$z_0 = e^{\frac{i\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)} = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} = (\text{rita trig. cirkeln}) = -\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}$$

$$z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{2\pi}{3}\right)} = \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}$$

$$\text{Svar: } z_0 = i, \quad z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}, \quad z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}$$

$$3. \quad \text{Vi har att } e^{\pi i} = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1 \text{ och}$$

$$\frac{(3-i)(3+i)}{1+2i} = \frac{3^2 - i^2}{1+2i} = \frac{10}{1+2i} = \frac{10(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{10-20i}{1^2 - (2i)^2} = \frac{10-20i}{5} = 2-4i$$

så vi får att

$$\frac{(3-i)(3+i)}{1+2i} \cdot e^{\pi i} = (2-4i)(-1) = -2+4i$$

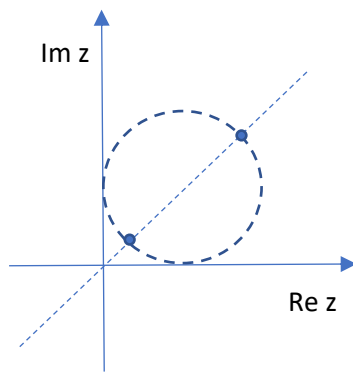
$$\text{Svar: } -2+4i$$

$$4. \quad \begin{cases} \operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z \\ |z - 2 - 2i| = 2 \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} \operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z \\ |z - (2 + 2i)| = 2 \end{cases}$$

Lösningsmängden till första ekvationen är en rät linje $y=x$ i det komplexa talplanet, där x är $\operatorname{Re} z$ och y är $\operatorname{Im} z$.

Lösningsmängden till den andra ekvationen är en cirkel med centrum i $2+2i$ och radien 2 (denna cirkel tangerar reella axeln i 2 och imaginära axeln i $2i$).

Lösningsmängden till ekvationssystemet är de punkter i talplanet som ligger i båda lösningsmängderna, d.v.s. de två punkter där linjen skär cirkeln.



Svar: De två skärningspunkterna i figuren är ekvationssystemets lösningar.

$$5. \quad a) \quad a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} = (-2, 5) \\ a \cdot (2, 1) + b \cdot (4, -1) = (-2, 5)$$

$$\text{Detta ger ett ekvationssystem: } \begin{cases} 2a + 4b = -2 \\ a - b = 5 \end{cases}$$

$$\text{Med lösning: } \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$b) \quad \vec{v} = \frac{1}{6} \cdot \vec{AB} = \frac{1}{6} \cdot (1 - (-1), 5 - 3) = \frac{1}{6} \cdot (2, 2) = \left(\frac{2}{6}, \frac{2}{6}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\text{Svar: } a) \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases} \quad b) \quad \vec{v} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$