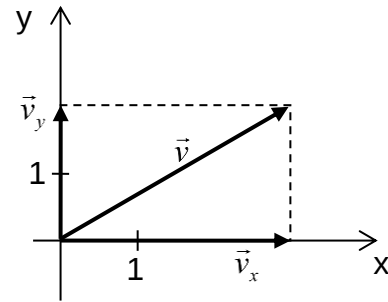


LINJÄRA KOMBINATIONER AV VEKTORER.

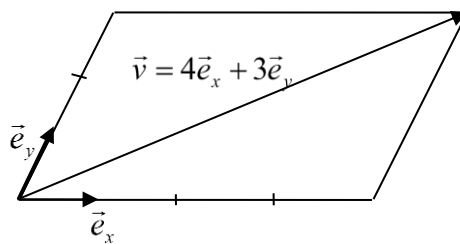
En vektor kan alltid delas upp i två komponenter längs två givna riktningar. I ett rätvinkligt koordinatsystem kan alltid en vektor $\vec{v}$ delas upp i en komponent $\vec{v}_x$ i x-axelns riktning och en komponent $\vec{v}_y$ i y-axelns riktning, dvs $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$.



Låt $\vec{e}_x$ och $\vec{e}_y$ i nedan vara två vektorer i planet som inte är parallell. Vi kan då välja dem till *basvektorer* och uttrycka varje vektor $\vec{v}$ i planet som en *linjär kombination* av dem $\vec{v} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y$, där x och y är reella tal. Talen x och y kallas *koordinater* för $\vec{v}$ i basen

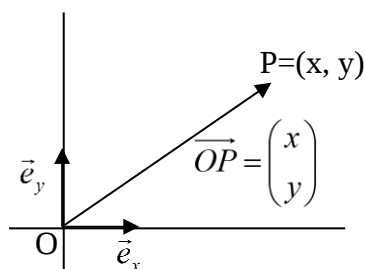
$\vec{e}_x, \vec{e}_y$. Man skriver kortare $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ och säger att vektorn $\vec{v}$ är given på *koordinatform*.

I figuren är $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.



Genom att fixerar en punkt O i planet, som vi kallar *origo*, kan varje punkt P i planet paras ihop med vektorn $\overrightarrow{OP}$, se figuren nedan. Vi får då också ett sätt att ge punkter koordinater med punkten (x, y) menar vi den punkt där spetsen av $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ hamnar om

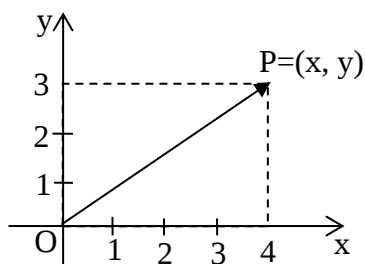
den ansätts med fotpunkt i O. Punkten O kallas ofta *origo*. $\overrightarrow{OP}$ kallas *ortsvektorn* för punkten P. Det är vanligt att använda beteckningen (x, y) även för den vektor vi kallar $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



Ortonormerat koordinatsystem

Om basvektorerna $\vec{e}_x$ och $\vec{e}_y$ har längden 1 (dvs är normerade) och är vinkelräta mot varandra (ortogonala) kallas motsvarande koordinatsystem ortonormerat (ett ON-system). Normalt ritas man vid ON-system inte ut basvektorerna $\vec{e}_x$ och $\vec{e}_y$ utan ritas ut två linjer som skär varandra i origo och som är parallella med $\vec{e}_x$ respektive $\vec{e}_y$.

Dessa linjer graderas som i figuren och kallas koordinataxlar. Längden på en vektor i planet kan beräknas med pythagoras sats.

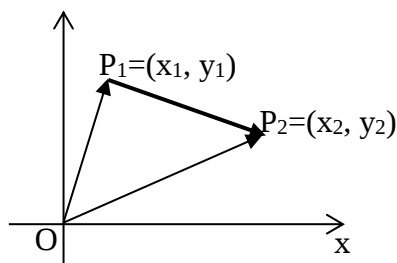


$$\text{Om } \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ så är } |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Vektorn $\overrightarrow{P_1P_2}$ från $P_1 = (x_1, y_1)$ till $P_2 = (x_2, y_2)$ i figur nedan är

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \text{ med längden } |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Denna formel kallas för *avståndsformeln*.



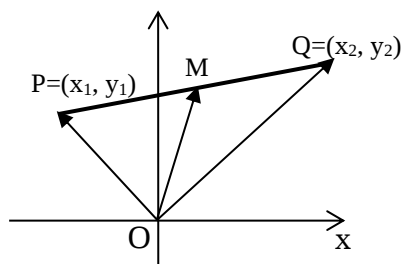
Låt M vara mittpunkten på en sträcka PQ.

Vi har att $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$, där $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ och

$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Alltså gäller

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} \end{pmatrix}. \text{ Denna}$$

formel kallas för *mittpunktsformeln*.



Basvektorer kan ha olika beteckningar tex $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$ eller $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ och $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ eller $\vec{e}_x = (1,0,0)$, $\vec{e}_y = (0,1,0)$ och $\vec{e}_z = (0,0,1)$.

Varje vektor $\vec{u} = (x, y, z)$ kan uppenbart skrivas som en linjär kombination av basvektorer:

$$(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

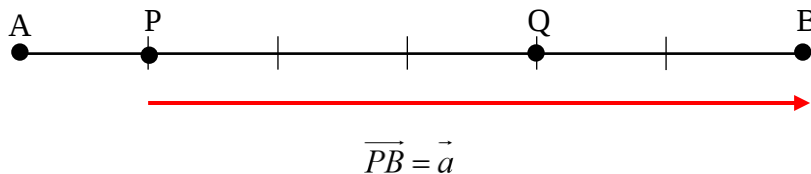
Det är enkelt att kontrollera ovanstående:

$$HL = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) = (x, y, z) = VL$$

Exempel 1: Punkterna P och Q delar in linjen AB i förhållandet 1:3:2. Uttryck följande vektorer som en linjär kombination av vektorn $\vec{a} = \overrightarrow{PB}$.

- a) $\overrightarrow{PQ}$ b) $\overrightarrow{AP}$ c) $\overrightarrow{AQ}$ d) $\overrightarrow{BQ}$.

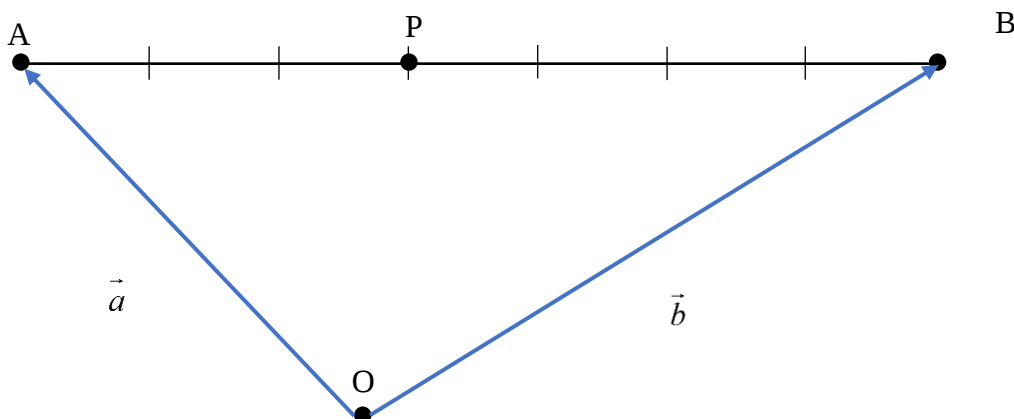
Lösning:



Från P till B är det fem delstreck.

- a) $\overrightarrow{PQ} = \frac{3}{5}\vec{a}$ b) $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{5}\vec{a}$ c) $\overrightarrow{AQ} = \frac{4}{5}\vec{a}$ d) $\overrightarrow{BQ} = -\frac{2}{5}\vec{a}$

Exempel 2: Punkten P delar upp linjen AB i förhållandet 3:4, se figuren nedan. Uttryck vektorn $\overrightarrow{OP}$ som en linjär kombination av vektorerna $\vec{a}$ och $\vec{b}$.



Lösning:

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AP} = \frac{3}{7} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{3}{7} (\vec{b} - \vec{a}) = \frac{3}{7} \vec{b} - \frac{3}{7} \vec{a}$$

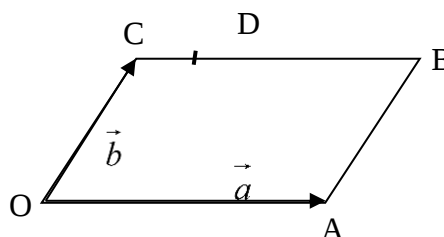
$$\overrightarrow{OP} = \vec{a} + \overrightarrow{AP} = \vec{a} + \frac{3}{7} \vec{b} - \frac{3}{7} \vec{a} = \frac{4}{7} \vec{a} + \frac{3}{7} \vec{b} = \frac{4\vec{a} + 3\vec{b}}{7}$$

Svar: $\overrightarrow{OP} = \frac{4\vec{a} + 3\vec{b}}{7}$

ÖVNINGAR

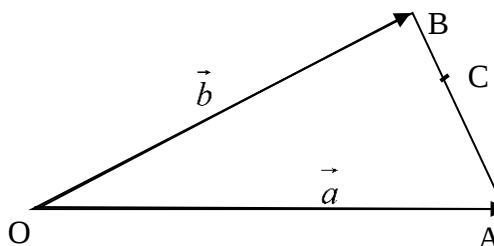
1. Figuren visar parallelogrammen OABC, där $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ och $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. D är en punkt på CB så att förhållandet CD:DB = 1:3. Uttryck följande vektorer som linjär kombinationer av $\vec{a}$ och $\vec{c}$.

- a) $\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{BA}$ c) $\overrightarrow{OB}$
d) $\overrightarrow{OD}$ e) $\overrightarrow{AD}$



2. Figuren visar en triangel OAB med $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ och $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. C är en punkt på AB så att AC:CB = 3:1. Uttryck följande vektorer som linjär kombinationer av $\vec{a}$ och $\vec{b}$.

- a) $\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{AC}$
c) $\overrightarrow{CB}$ d) $\overrightarrow{OC}$



3. Uttryck vektorn $\vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ som en linjär kombination av vektorerna $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ och

$\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, dvs bestäm talen r and s så att $r\vec{u} + s\vec{v} = \vec{w}$.

4. Uttryck vektorn $\vec{u} = (4, 7)$ som en linjär kombination av vektorerna $\vec{a} = (2, 3)$ och $\vec{b} = (2, 1)$, dvs bestäm talen r and s så att $r\vec{a} + s\vec{b} = \vec{u}$.

Svar:

1. a) $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$

b) $\overrightarrow{BA} = -\vec{b}$

c) $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$

d) $\overrightarrow{OD} = \vec{b} + \frac{1}{4}\vec{a}$

e) $\overrightarrow{AD} = \vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a}$

2. a) $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

b) $\overrightarrow{OD} = \frac{3}{4}(\vec{b} - \vec{a})$

c) $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{4}(\vec{b} - \vec{a})$

d) $\overrightarrow{OD} = \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{a}$

3. $\vec{w} = 3\vec{u} + 4\vec{v}$

4. $\vec{u} = \frac{5}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$