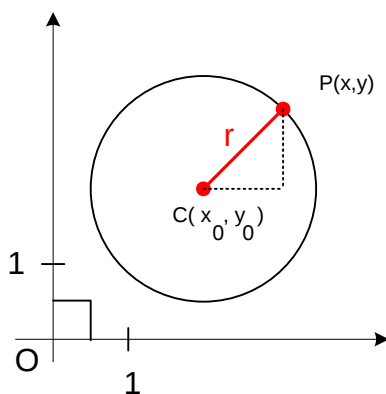


Följande material är gjort av tidigare lärare på kursen, Armin Halilovic, och har sedan blivit redigerat:

CIRKEL och CIRKELSKIVA

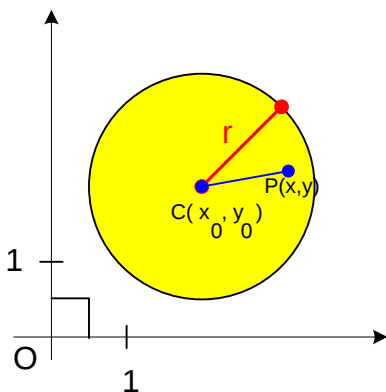
Definition. En **cirkel** är mängden av alla punkter **i ett plan** som ligger på samma avstånd, (cirkelns radie) till en given punkt (cirkelns centrum).

I ett ortonormerat koordinat system kan vi ange en cirkel med radien r och centrum i punkten $C(x_0, y_0)$, som mängden av alla punkter $P(x, y)$ som satisfierar ekvationen $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$



Cirkelns ekvation: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

Definition. En sluten (öppen) **cirkelskiva** med radien r och centrum i punkten C är mängden av alla punkter **i planet** vars avståndet till C är $\leq r$ ($< r$).



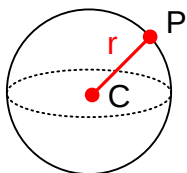
Alltså, för varje punkt $P(x, y)$ på en **sluten cirkelskiva** med radien r centrum i punkten $C(x_0, y_0)$, gäller $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$ i ett ON koordinat system.

=====

3D motsvarigheter till cirkel och cirkelskiva är sfär och klot.

SFÄR OCH KLOT

Definition. En **sfär** är mängden av alla punkter **i 3D-rummet** som ligger på samma avstånd, (sfärens radie) till en given punkt (sfärens centrum).



Sfärens ekvation (i ett ON system): $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$

Definition. Ett slutet (öppet) **klot** med radien r och centrum i punkten C är mängden av alla punkter **i 3D-rummet** vars avståndet till C är $\leq r$ ($< r$).

Slutet klot (i ett ON koordinatsystem):

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \leq r^2$$

Öppet klot (i ett ON koordinatsystem):

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 < r^2$$

=====

Exempel 1. Rita den cirkel vars ekvation i ett ortonormerat Oxy-koordinatsystem är $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 4$.

Tips. Använd kvadratkomplettering och skriv cirkeln på formen

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

Lösning:

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y = 4 \quad (\text{vi grupperar } x \text{ termer och } y\text{-termer och kvadratkompletterar})$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + y^2 - 2y = 4$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 = 4$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$$

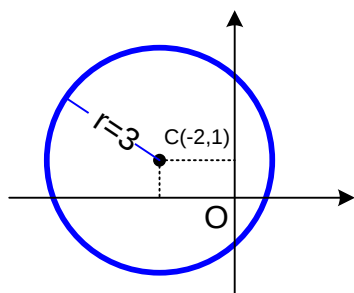
Om vi jämför ovanstående med cirkelns ekvation på formen

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

ser vi att $-x_0 = 2$, $-y_0 = -1$ och $r^2 = 9$,

dvs $x_0 = -2$, $y_0 = 1$ och $r = 3$.

Cirkeln har centrum i punkten $C(-2,1)$ och radien $r = 3$.



=====

ÖVNINGAR

1. Beräkna medelpunkten M och radien r till följande cirklar:

a. $(x-3)^2 + y^2 = 25$ b. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 18$

c. $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 2$ d. $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 6$

e. $2x^2 + 2y^2 - 2x + 2y = 1$

2. Bestäm ekvationen för den cirkel som har en diameter mellan punkterna (5, -4) och (-1, -4).

3. Ange radien och medelpunkten till sfären

a) $x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 = 22$. b) $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - y + \frac{3}{2}z + \frac{129}{16} = 0$

Svar:

1. a) $r=5$, $M(3,0)$ b) $r = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $M(2, -1)$ c) $r=2$, $M(-1, 1)$

d) $r=4$, $M(3, -1)$ e) $r=1$, $M\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

2. $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 9$

3. a) $r = \sqrt{27}$, $M(2, -1, 0)$ b) $r = \frac{\sqrt{7}}{2}$, $M\left(-3, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$